

高等数学习题课

数据科学与工程学院

王婧

1. 曲线的切线
2. 曲面的法向量
3. 最小二乘法
4. 极值

空间曲线的切线与法平面方程

1、曲线 Γ 的参数方程 $\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$

曲线在 M_0 处的切线方程 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)},$

曲线在 M_0 处的法平面方程

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

2、曲线 Γ 的一般式方程 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

若雅可比行列式 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)},$

曲线在 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{M_0}};$$

曲线在 M_0 处的法平面方程为

$$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0$$

1.求曲线 $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \frac{1+t}{1-t}$, $z = t^2$ 在 $t=0$ 处的切线方程

2.求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 在 $(0,0,a)$ 处的切线方程

空间曲面的切平面与法线方程

1. 空间曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

曲面 Σ 在点 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

2. 空间曲面方程为 $z=f(x,y)$

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

则曲面在点 M_0 处的切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

$$\text{即 } z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

曲面 Σ 在点 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

3. 空间曲面方程为 $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases}$

曲面 Σ 在 M_0 处的切平面方程

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (x - x_0) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (y - y_0) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (z - z_0) = 0$$

其行列式形式可表示为

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

法曲面 Σ 在 M_0 处的线方程为

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}}.$$

求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 上平行于平面 $x + 4y - z = 0$ 的切平面方程。

求曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切平面方程。

求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 上平行于平面 $x + 4y - z = 0$ 的切平面方程。

解： 空间曲面法向量

设函数 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$,

则 $n = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z)$

设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 则

$$\frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{4} = \frac{z_0}{-1}$$
$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2$$

切点为 $(1/3, 4/3, -1/3), (-1/3, -4/3, 1/3)$

切面方程为:

$$(x - \frac{1}{3}) + 4(y - \frac{4}{3}) - (z + \frac{1}{3}) = 0 \text{ 或 } (x + \frac{1}{3}) + 4(y + \frac{4}{3}) - (z - \frac{1}{3}) = 0$$

$$\text{即 } x + 4y - z = 6 \text{ 或 } x + 4y - z = -6$$

求曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切平面方程。

解： 设函数 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$,
则 $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, -1)$
切点为 $(1, 1, 2)$, 则
 $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$
 $2(x - 1) + 2(y - 1) - 1(z - 2) = 0$

$$2x + 2y - z - 2 = 0$$

1、求函数 $f(x, y)$ 无约束极值的方法:

(1) 先求偏导数 $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$;

(2) 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 求出驻点;

(3) 确定驻点处 $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0),$

$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ 的值及 $\Delta = AC - B^2$ 的符号,

1) 当 $\Delta > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} \Delta < 0 \text{ 时取极大值;} \\ \Delta > 0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $\Delta < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $\Delta = 0$ 时, 可能有极值, 也可能没有极值.

求函数 $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2-3y^2+9y$ 的极值。

解：由已知 $f'_x = 3x^2 - 6x$, $f'_y = -3y^2 - 6y + 9$

令 $f'_x = 0$, $f'_y = 0$

解得 $\begin{cases} x = 0, 2, \\ y = 1, -3, \end{cases}$

即得驻点 $(0,1)$, $(0,-3)$, $(2,1)$, $(2,-3)$

又 $A = f''_{xx} = 6x - 6$, $B = f''_{xy} = 0$, $C = f''_{yy} = -6y - 6$

于是在 $(0,1)$ 处, $A = -6$, $B = 0$, $C = -12$.

$AC - B^2 = 72 > 0$, 有极大值为 $f(0,1)=5$

在(2,1)处, $A = 6, B = 0, C = -12$.

$AC - B^2 = -72 < 0$, 无极值.

在(2,-3)处, $A = 6, B = 0, C = 12$.

$AC - B^2 = 72 > 0$

有极小值为 $f(2,-3)=-31$

在(0,-3)处, $A = -6, B = 0, C = 12$.

$AC - B^2 = -72 < 0$, 无极值.

2、条件极值的求法:

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

先构造函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ (其中 λ 为某一常数)

可由
$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \quad \text{解出 } x,y,\lambda,$$

其中 x,y 就是可能的极值点的坐标.

3. 最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p , 其溶解温度($^{\circ}\text{C}$)为 θ , 由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

$p/\%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta/^{\circ}\text{C}$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

解: 由方程组
$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 p_i^2 + b \sum_{i=1}^6 p_i = \sum_{i=1}^6 \theta_i p_i, \\ a \sum_{i=1}^6 p_i + 6b = \sum_{i=1}^6 \theta_i, \end{cases}$$
 确定先验公式中的 a, b , 先算出

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 p_i^2 = 28\,365.28, & \sum_{i=1}^6 p_i = 396.6, \\ \sum_{i=1}^6 \theta_i p_i = 101\,176.3, & \sum_{i=1}^6 \theta_i = 1\,458, \end{cases}$$

代入方程组, 得
$$\begin{cases} 28\,365.28a + 396.6b = 101\,176.3, \\ 396.6a + 6b = 1\,458. \end{cases}$$
 解此方程组, 得 $a = 2.234$, $b = 95.33$.

则经验公式 $\theta = 2.234p + 95.33$.



2. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. 现若假定经验公式是 $y = ax^2 + bx + c$. 试按最小二乘法建立 a, b, c 应满足的三元一次方程组.

解: 设 M 是每个数据差的平方和: $M = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2 = M(a, b, c)$, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](x_i)^2 = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](x_i) = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i x_i^2 - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i x_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

