解析几何

数据科学与工程学院

王婧

空间直线与平面

一、平面及其方程

二、空间直线的方程

三、有关平面与直线的位置关系

一、平面及其方程

1.平面的点法式方程

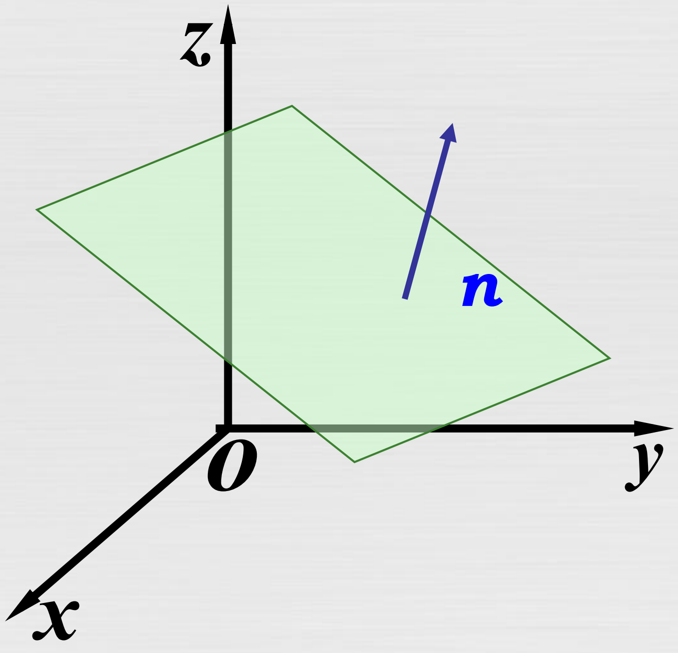
（1）法向量

垂直于平面的非零向量

叫做该平面的**法向量.**

平面上的任一向量

都与该平面的法向量垂直.



（2）平面的点法式方程

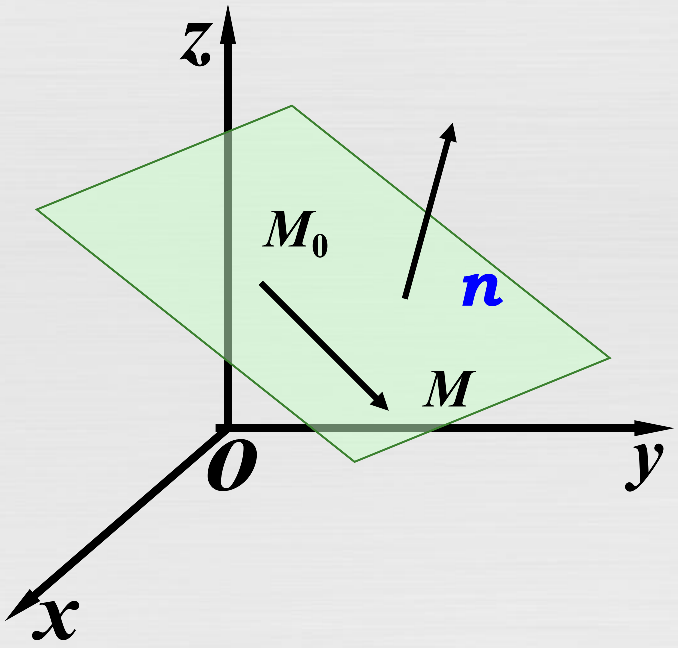
设平面Π 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且有法向量$n=(A,B,C)$.

对于平面上任一点$M(x, y, z)$,

向量$\overrightarrow{M_0M}$与n垂直.

$$n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

而$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,



得: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (1)

称方程(1) 为平面的点法式方程.

例1. 求过点(2, –3, 0)且以 n = (1, –2, 3)为法向量的平面的方程.

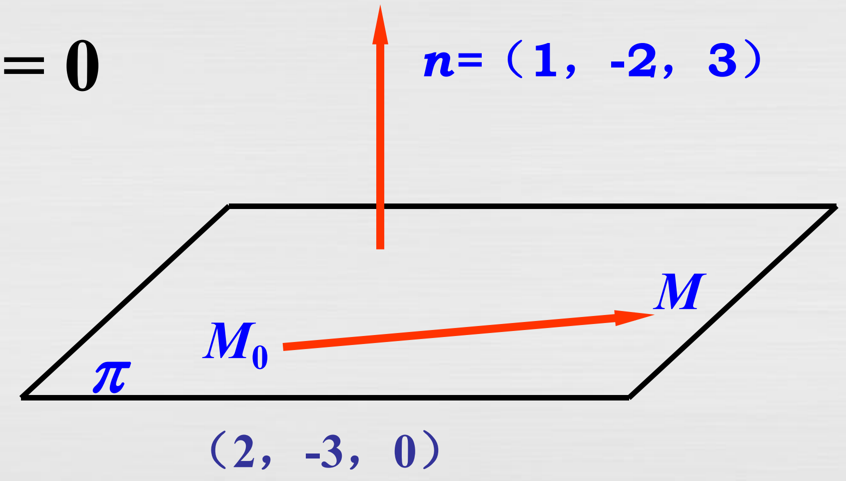
解: 设平面上任一点$M(x, y, z)$,

$$\overrightarrow{M_0M} = (x-2, y+3, z-0)$$

根据平面的点法式方程(1), 可得平面方程为:

$$(x-2)-2\cdot(y+3)+3\cdot(z-0)=0$$

即 $x-2y+3z-8=0$



例2. 求过三点$M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$和$M_3(0, 2, 3)$的平面的方程.

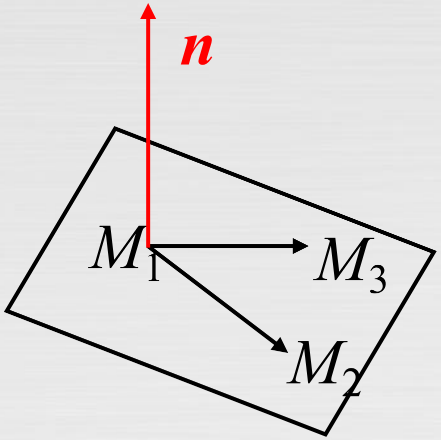
解: 先找出该平面的法向量$\boldsymbol{n}$.

由于$\boldsymbol{n}$与向量$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$都垂直.

而$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3, 4, -6)$　　$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2, 3, -1)$

可取$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$



所以, 所求平面的方程为:

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即: $$14x + 9y - z - 15 = 0$$

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$.

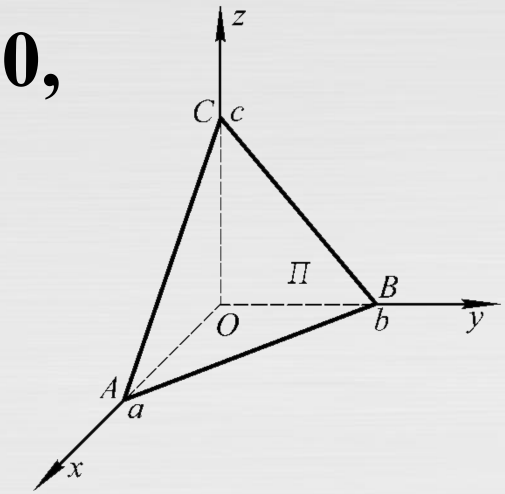
例3. 如图, 平面Π在三个坐标轴上的截距分别为a,b,c.

求此平面的方程, $(a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$

解: 因为a,b,c分别表示平面Π与x轴、y轴、z轴上的截距,

所以平面Π通过三点 $A(a,0,0)$, $B(,0b,0)$, $C(0,0,c)$

设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$,



将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

解得 $A = -\dfrac{D}{a}$, $B = -\dfrac{D}{b}$, $C = -\dfrac{D}{c}$.

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

将 $A = -\frac{D}{a}$, $B = -\frac{D}{b}$, $C = -\frac{D}{c}$,

代入所设方程得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

3. 平面方程的几种特殊情形

(1) 过原点的平面方程

由于O (0, 0, 0)满足方程, 所以$D = 0$.

于是, 过原点的平面方程为:

$$Ax + By + Cz = 0$$

(2) 平行于坐标轴的平面方程

考虑平行于x轴的平面$Ax+By+Cz+D=0$,

它的法向量$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$与x 轴上的单位向量

$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0)$垂直, 所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=A=0$$

于是:

平行于x 轴的平面方程是 $By+Cz+D=0$;

平行于y 轴的平面方程是 $Ax+Cz+D=0$;

平行于z 轴的平面方程是 $Ax+By+D=0$.

特别: $D=0$时, 平面过坐标轴.

(3) 平行于坐标面（垂直于坐标轴）的平面方程

平行于xOy 面的平面方程是 $Cz + D = 0$; (即$z = \mathrm{k}$)

平行于xOz 面的平面方程是 $By + D = 0$; (即$y = \mathrm{k}$)

平行于yOz 面的平面方程是 $Ax + D = 0$. (即$x = \mathrm{k}$)

例4. 指出下列平面位置的特点，并作出其图形：

(1) $x+y=4$, (2) $z=2$

解： (1) $x+y=4$,

由于方程中不含z的项，因此平面平行于z轴, 见图1

(2) $z=2$

表示过点(0,0,2)且垂直于z轴的平面. 见图2

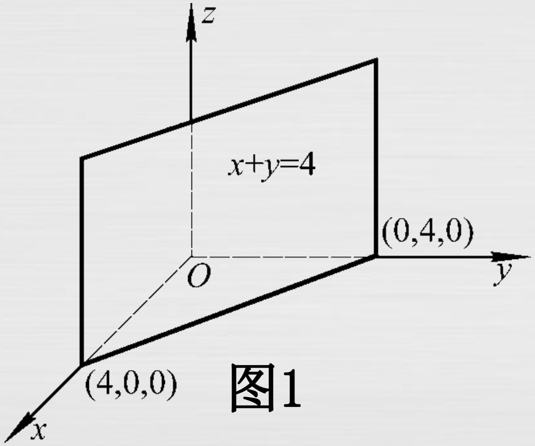


图1

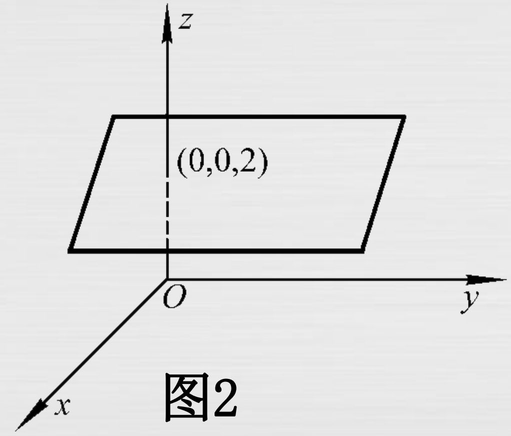


图2

例5. 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解: 由于平面过 x 轴, 所以 $A = D = 0$.

设所求平面的方程是 $By + Cz = 0$

又点 $(4, -3, -1)$ 在平面上, 所以

$$-3B - C = 0$$

$$C = -3B$$

所求平面方程为 $By - 3Bz = 0$

即 $$y - 3z = 0$$

例6. 已知平面过点$M_0(-1, 2, 3)$, 且平行于平面$2x - 3y + 4z - 1 = 0$, 求其方程.

解: 所求平面与已知平面有相同的法向量

$$\boldsymbol{n} = (2\ -3,\ 4)$$

$$2(x+1) - 3(y-2) + 4(z-3) = 0$$

即

$$2x - 3y + 4z - 4 = 0$$

二、空间直线的方程

1. 空间直线的一般方程

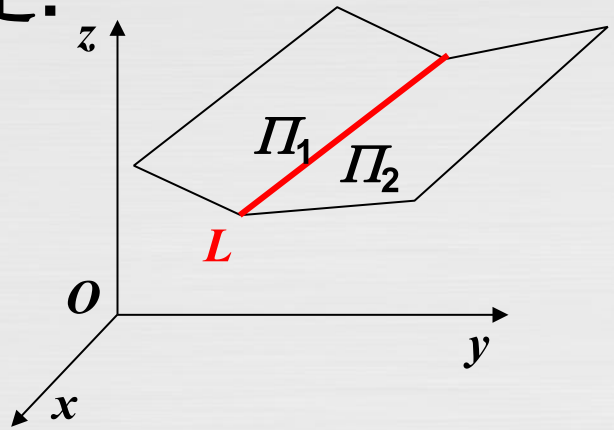
空间直线可看成是两个不平行平面Π_1与Π_2的交线

已知平面Π_1: $\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

Π_2: $\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

那末, 交线L上的任何点的坐标满足:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$



不在交线L上的点不满足方程组(1)

称方程组(1)空间直线的一般方程.

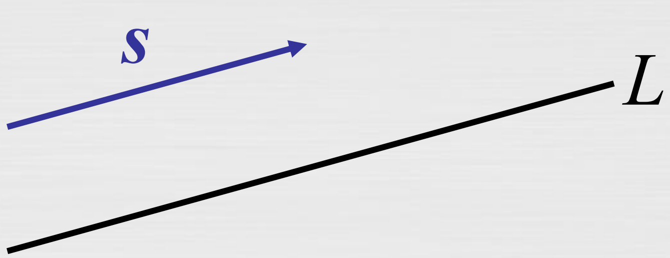
2. 空间直线的对称式方程

定义1(方向向量)

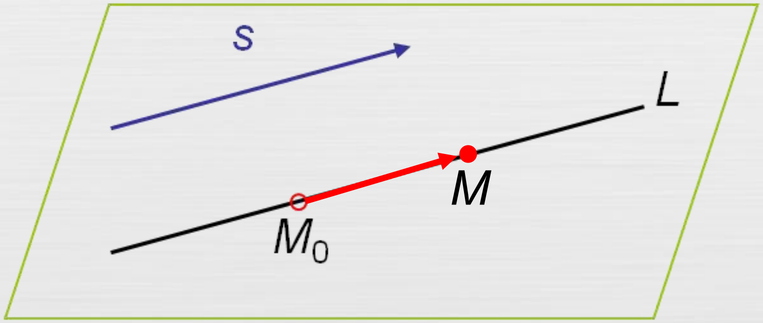
与空间直线L平行的向量 $s = (m, n, p)$,

称为该直线的方向向量.

而s 的坐标 m, n, p 称为直线L的一组方向数.



已知直线L过$M_0(x_0, y_0, z_0)$点



方向向量 $\vec{s}=(m, n, p)$

在L上任取一点$M(x, y, z)$，有$\overrightarrow{M_0M} // \vec{s}$.

而$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

所以得比例式

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (2)$$

称为空间直线L的对称式方程.或标准式方程.

若令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得: $$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \qquad (3)$$

称为空间直线L的参数方程.

例7. 求过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的方程.

解: 可以取方向向量

$$s=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

由直线的标准式方程可知,

过两点M_1,M_2的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

例8. 求通过点 $A(2, -3, 4)$与 $B(4, -1, 3)$的直线方程.

解: 直线的方向向量可取 $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$

所以, 直线的对称式方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

例9. 写出直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$

的对称式方程和参数方程.

解: (1) 先找出直线上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

令 $z_0=0$, 代入方程组, 得

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$$

解得: $x_0=-\dfrac{5}{3}$, $y_0=\dfrac{2}{3}$

所以, 点 $M_0(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, 0)$在直线上.

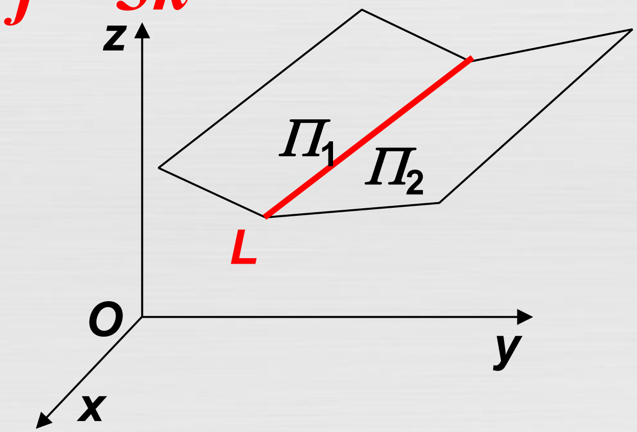
(2) 再找直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$.

由于平面Π_1: $x+y+z+1=0$的法线向量 $n_1=(1, 1, 1)$

平面Π_2: $2x-y+3z+4=0$的法线向量 $n_2=(2,-1, 3)$

所以, 可取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4i-j-3k$$



于是, 得直线的对称式方程:

$$\frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{-3}$$

令 $\frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{-3}=t$

得直线的参数方程:

$$\begin{cases} x=-\frac{5}{3}+4t \\ y=\frac{2}{3}-t \\ z=-3t \end{cases}$$

例10. 将直线的对称式方程 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

改为参数式方程

解: 令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$$

三、 平面与直线的的位置关系

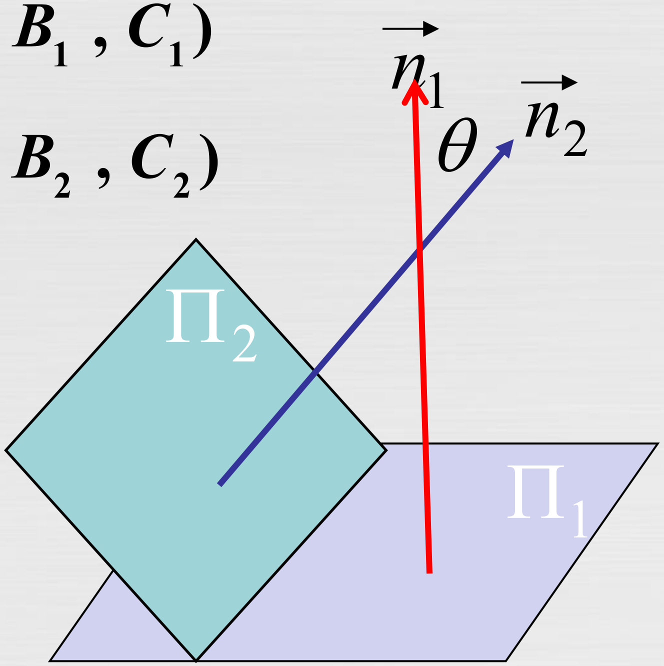
1. 两平面的夹角及平行、垂直的条件

(1)两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常为锐角)称为两平面的夹角.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$



则两平面夹角θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

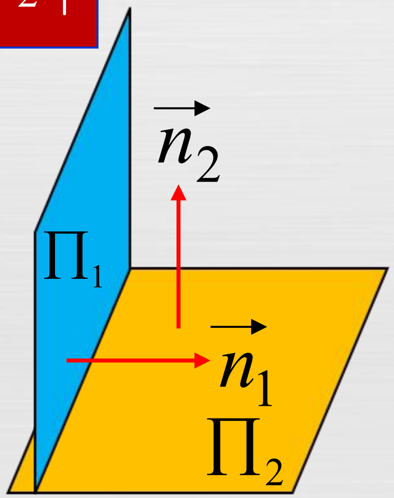
$$\Pi_1: \ \boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$
$$\Pi_2: \ \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论：

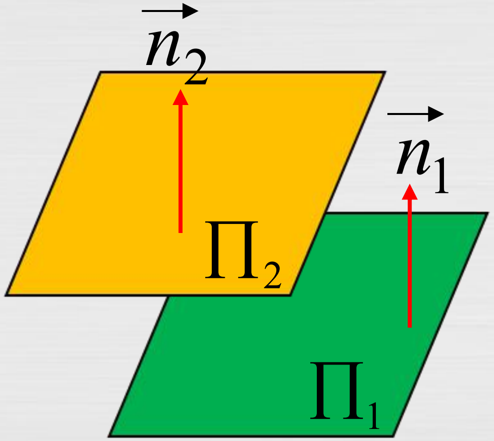
(2) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



(3) $\Pi_1 \,/\!/\, \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \,/\!/\, \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



例11. 设平面Π_1与Π_2的方程分别为x-y+2z-6=0及2x+y+z-5=0,求它们的夹角.

解: 根据公式

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\times\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

所以平面Π_1与Π_2的夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

例12. 一平面通过两点$M_1(1, 1, 1)$和$M_2(0, 1, -1)$, 垂直于平面 $x+y+z=0$, 求它的方程.

解: 设所求平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$

已知平面 $x+y+z=0$的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1, 1, 1)$

所以: $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$

而 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1, 0, -2)$

于是: $\begin{cases} A\cdot(-1)+B\cdot 0+C\cdot(-2)=0 \\ A\cdot 1+B\cdot 1+C\cdot 1=0 \end{cases}$

$$M_1(1, 1, 1)\ ,\ M_2(0, 1, -1)$$

解得: $\begin{cases} B = C \\ A = -2C \end{cases}$

取 $C = 1$, 得平面的一个法向量

$$n = (-2, 1, 1)$$

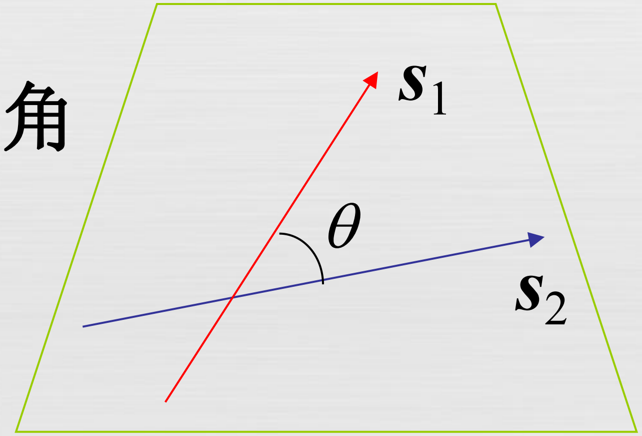
所以, 所求平面方程是

$$-2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1) = 0$$

即: $2x - y - z = 0$

2. 两直线的夹角及平行、垂直的条件

(1) 两直线的夹角



定义2 两直线的方向向量间的夹角称为两直线的夹角, 常指锐角.

已知直线L_1, L_2的方程

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad s_1=(m_1, n_1, p_1)$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \quad s_2=(m_2, n_2, p_2)$$

$s_1=(m_1, n_1, p_1)$

L_1与 L_2的夹角φ 的余弦为:

$s_2=(m_2, n_2, p_2)$

$$\cos\varphi = |\cos(\widehat{s_1, s_2})|$$

$$= \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1| \cdot |s_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

(2) L_1垂直于 $L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

(3) L_1平行于$L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}.$

例13. 求直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$. 的夹角

解: 直线L_1, L_2的方向向量 $s_1=(1, -4, 1)$, $s_2=(2, -2, -1)$

则有: $\cos\varphi = |\cos(\widehat{s_1, s_2})| = \dfrac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1| \cdot |s_2|}$

$$= \frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

例14. 求经过点(2,0,-1)且与直线 $\begin{cases} 2x-3y+z-6=0, \\ 4x-2y+3z+9=0 \end{cases}$ 平行的直线方程.

解： 所求直线与已知直线平行,其方向向量可取为

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$$

根据直线的标准式方程,得所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$$

例15. 求经过点(2,1,3)且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解: 先作一平面过点(2,1,3),且垂直于已知直线,这平面的方程应为 $3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0.$

再求已知直线与这平面的交点.

把已知直线的参数方程 $\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=1+2t, \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程，解之得 $t=\dfrac{3}{7}$

再将求得的t值代入直线参数方程中,

即得 $x=\dfrac{2}{7},\quad y=\dfrac{13}{7},\quad z=-\dfrac{3}{7}$

所以,交点的坐标是 $\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$

于是,向量 $\left(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right)$

是所求直线的一个方向向量,

故所求直线的方程为 $\dfrac{x-2}{\frac{2}{7}-2}=\dfrac{y-1}{\frac{13}{7}-1}=\dfrac{z-3}{-\frac{3}{7}-3}$

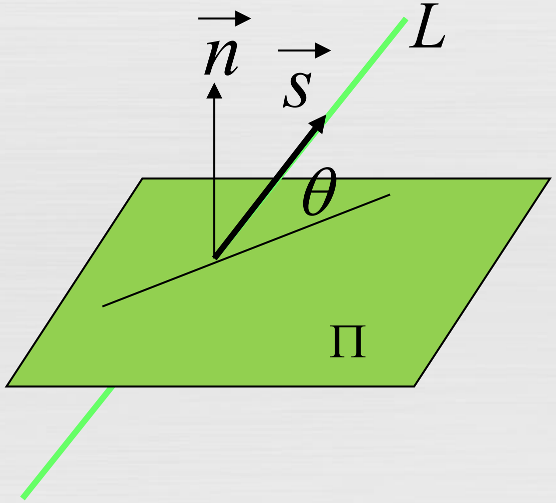
即 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

3. 直线与平面的夹角及平行、垂直的条件

当直线L与平面Π不垂直时，直线L和它在平面Π上的投影直线所夹锐角θ称为直线与平面间的夹角，$(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$



则直线与平面夹角 θ 满足

$$\sin\theta = \cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$$

$$= \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

从而有:

(1) $L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} // \vec{n} \Longleftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$

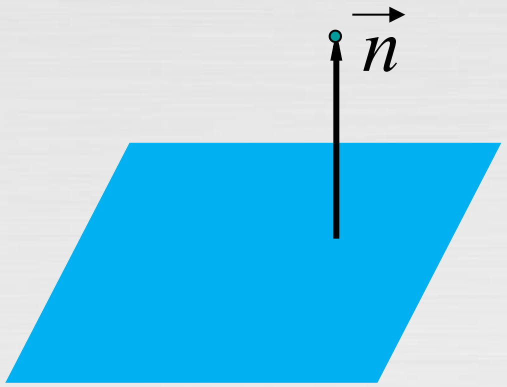
(2) $L // \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

例16. 求过点(1,−2 , 4) 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程.

解: 取已知平面的法向量 $\vec{n} = (2\,,\,-3\,,\,1)$ 为所求直线的方向向量.

则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$$



例17.设平面Π的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$

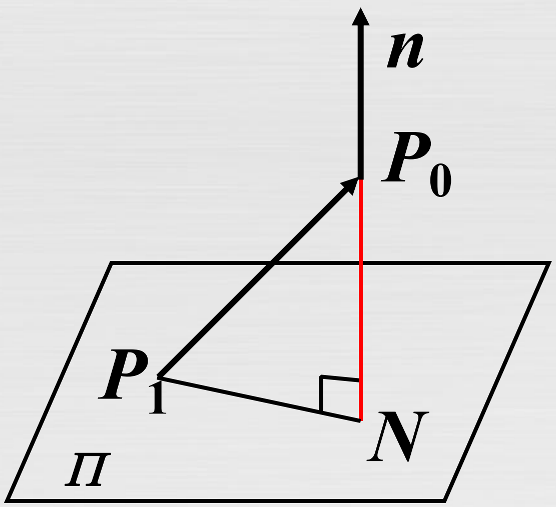
是平面Π外的一点,求 P_0到这平面的距离d.

解: 如图, 在平面Π上任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$

则 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$

过P_0点作一法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$

于是:



$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$$

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

又　$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)$

-D

$= Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)$

$= Ax_0+By_0+Cz_0+D$

所以，得点P_0到平面$Ax+By+Cz+D$=0的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (5)$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$是平面上的点

例18. 求点 $A(1, 2, 1)$到平面Π: $x + 2y + 2z - 10 = 0$

的距离

解： $n = (1,2,2)$　　$A(1, 2, 1)$

由距离公式得

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

小结

1.平面基本方程

一般式 $Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \qquad (abc\neq 0)$

2.平面与平面之间的关系

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

3. 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

$(m^2+n^2+p^2\neq 0)$

4. 线与线的关系

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

5. 面与线间的关系

$$\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{\Pi} \Longleftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$\mathbf{L} // \mathbf{\Pi} \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

练习题

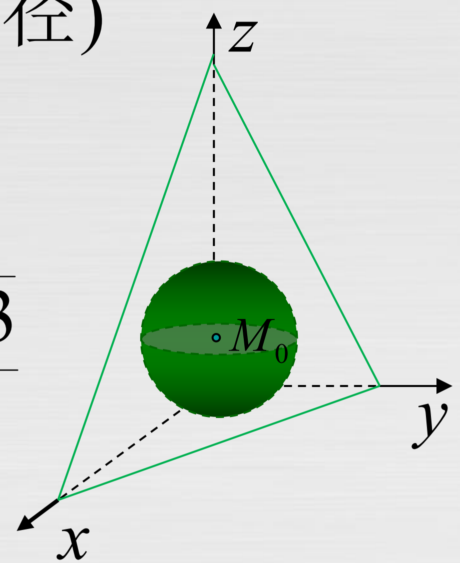
1. 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,则它位于第一卦限,且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=x_0=y_0=z_0=R(\text{半径})$$

$$\because x_0+y_0+z_0\le 1,\ \therefore 1-3x_0=\sqrt{3}\,x_0$$

从而 $x_0=y_0=z_0=R=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$



因此所求球面方程为

$$(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2=(\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2$$

2. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面∏: $x+y+z=0$, 求其方程 .

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow -A+0\cdot B-2C=0$, 即 $A=-2C$

$\vec{n}\perp\Pi$ 的法向量 $\Longrightarrow A+B+C=0$, 故

$$B=-(A+C)=C$$

因此有 $2\cancel{C}(x-1)+\cancel{C}(y-1)+\cancel{C}(z-1)=0 \quad (C\neq 0)$

约去C, 得 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

即

$$2x-y-z=0$$

3. 已知动点 $M(x,y,z)$到 xOy平面的距离与点M到点 $(1, -1, 2)$的距离相等, 求点 M的轨迹方程.

解: 根据题意, 有

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$

或 $z^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$,

化简得

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4(z-1),$$

这就是点M的轨迹方程.

提高题

1. 已知点$A(1, 0, 0)$及点$B(0, 2, 1)$, 试在z轴上求一点C, 使ΔABC的面积最小. .

2. 将曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$ 化为参数方程:

3. 求过直线L: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

4. 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

提高题解答

1. 已知点$A(1, 0, 0)$及点$B(0, 2, 1)$, 试在z轴上求一点C, 使ΔABC的面积最小. .

解: 设所求的点为$C(0, 0, z)$, 则,

因为 $\overrightarrow{AC}=(-1, 0, z)$ $\quad \overrightarrow{BC}=(0, -2, z-1)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & z \\ 0 & -2 & z-1 \end{vmatrix}=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

所以ΔABC的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}$$

令 $\dfrac{dS}{dz}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8z+2(z-1)}{\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}}=0$ 得 $z=\dfrac{1}{5}$ 所求点为 $C(0, 0, \dfrac{1}{5})$

2. 将曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$ 化为参数方程:

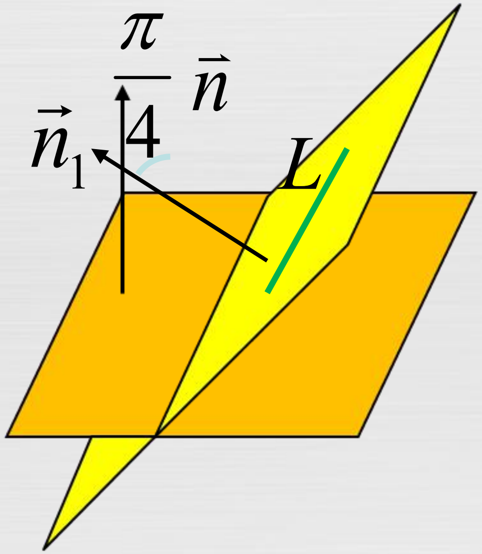
解: 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得 $2x^2+z^2=9$, 即

$$\frac{x^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$$

令 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$ 则 $z=3\sin t$.

故所求参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ z=3\sin t \end{cases}$.

3. 求过直线 L: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.



解: 过直线L的平面束方程

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$$

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$

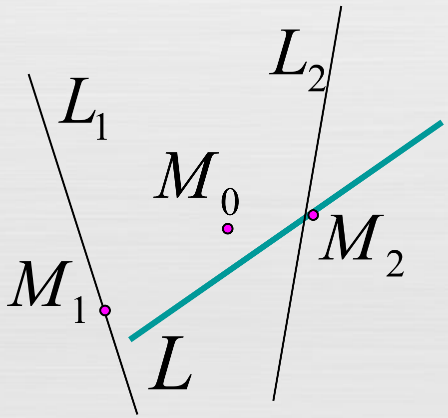
其法向量为 $\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$.

已知平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,-4,-8\}$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}=\frac{|1+\lambda-20-8+8\lambda|}{9\sqrt{(1+\lambda)^2+25+(1-\lambda)^2}}=\frac{|\lambda-3|}{\sqrt{27+2\lambda^2}}\Longrightarrow\lambda=-\frac{3}{4}$$

从而得所求平面方程 $x+20y+7z-12=0$.

4. 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.



解: 先求交点 M_1, M_2;

将 L_1, L_2 的方程化为参数方程

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases},\quad L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设 L 与它们的交点分别为

$$M_1(t_1, 2t_1, t_1-1),\quad M_2(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1).$$

$$M_0(1,1,1) \quad M_1(t_1, 2t_1, t_1-1), \quad M_2(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1).$$

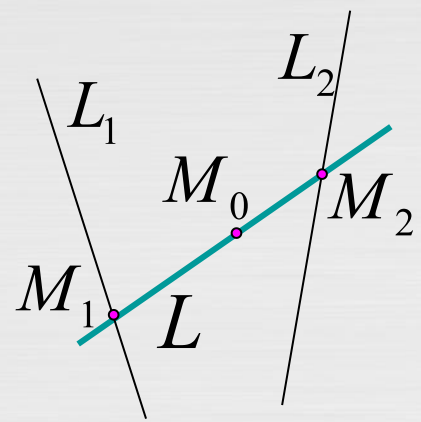
M_0, M_1, M_2 三点共线

$$\Longrightarrow \overrightarrow{M_0M_1} // \overrightarrow{M_0M_2}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_1} = [\boldsymbol{t}_1-1, 2\boldsymbol{t}_1-1, (\boldsymbol{t}_1-1)-1] \quad \overrightarrow{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_2} = [\boldsymbol{t}_2-1, 3\boldsymbol{t}_2-1, (2\boldsymbol{t}_2-1)-1]$$

$$\Longrightarrow \frac{t_1-1}{t_2-1} = \frac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1} = \frac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}$$

$$\Longrightarrow t_1 = 0, t_2 = 2$$



$$\Longrightarrow M_1 = (0,0,-1), M_2 = (2,2,3)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2} = (2,2,4) = 2(1,1,2)$$

$$\Longrightarrow L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$