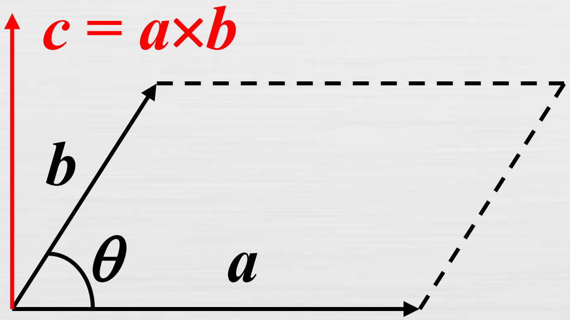
解析几何

数据科学与工程学院

王婧

2.两向量的向量积

(1)定义2 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 夹角为θ, 作一个向量$\boldsymbol{c}$, 使得



(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$

即等于以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

(2) $\boldsymbol{c}$ 与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所在的平面垂直, (即 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$且$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$).

$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.

则将向量$\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积, 记作: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

即: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(2) 向量积的性质 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ （向量积不满足交换律）；

(2) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$

(3) $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, λ为实数

由向量积的定义，容易得出下面的结论：

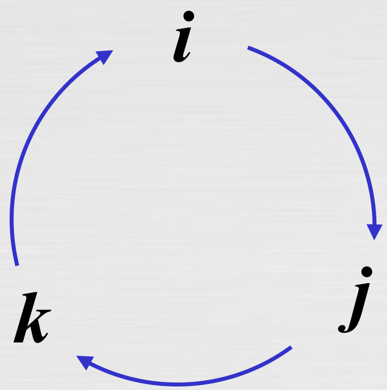
(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

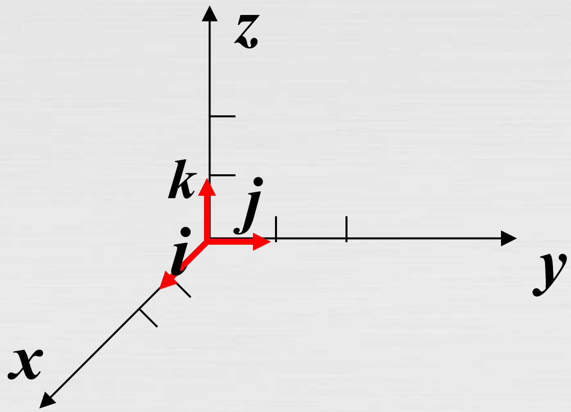
(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 平行 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

例如: $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

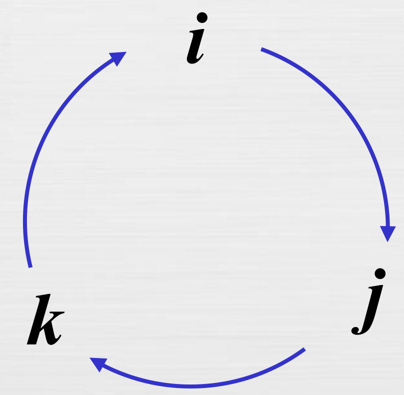
$$i \times j = k \qquad j \times k = i \qquad k \times i = j$$

$$j \times i = -k \qquad k \times j = -i \qquad i \times k = -j$$





(3) 向量积的坐标表示式



设 $a=(a_x, a_y, a_z)$　　$b=(b_x, b_y, b_z)$ 则

$$a\times b=(a_x i+a_y j+a_z k)\times(b_x i+b_y j+b_z k)$$

$$=a_x i\times(b_x i+b_y j+b_z k)+a_y j\times(b_x i+b_y j+b_z k)$$

$$+a_z k\times(b_x i+b_y j+b_z k)$$

$$=\underline{\underline{a_x b_x(i\times i)}}+a_x b_y(i\times j)+a_x b_z(i\times k)$$

$$+a_y b_x(j\times i)+\underline{\underline{a_y b_y(j\times j)}}+a_y b_z(j\times k)$$

$$+a_z b_x(k\times i)+a_z b_y(k\times j)+\underline{\underline{a_z b_z(k\times k)}}$$

$$=a_x b_y k+a_x b_z(-j)+a_y b_x(-k)+a_y b_z i$$

$$+a_z b_x j+a_z b_y(-i)$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)i+(a_z b_x-a_x b_z)j+(a_x b_y-a_y b_x)k$$

因此

$$a\times b=(a_yb_z-a_zb_y)\,i+(a_zb_x-a_xb_z)\,j+(a_xb_y-a_yb_x)\,k$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(4)向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}k$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

例10. 设 $a = 2i + j - k,\quad b = i - j + 2k$ 计算 $a \times b$

解: $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \left[1 \times 2 - (-1)^2\right] i + \left[(-1) \times 1 - 2 \times 2\right] j + \left[2 \times (-1) - 1 \times 1\right] k$$

$$= i - 5j - 3k$$

例11. 求垂直于向量 $a=(2,2,1)$和$b=(4,5,3)$的向量c.

解: $a\times b$ 同时垂直于a、b

而 $a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

$=i-2j+2k$

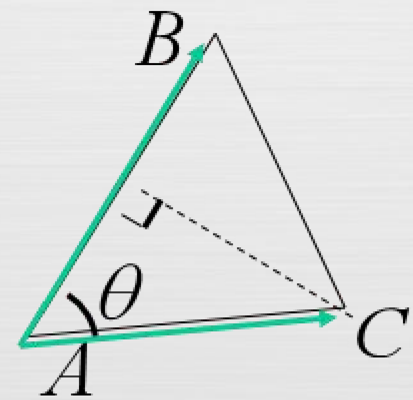
取 $c=a\times b=(1,-2,2)$.

显然, 对于任意 $\lambda\neq 0\in R$, $\lambda c=(\lambda,-2\lambda,2\lambda)$

也与a、b垂直.

例12. 已知三点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积

解: 如图所示



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \boxed{2} & 2 & \boxed{2}\\ \boxed{1} & 2 & \boxed{4}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(4,-6,\ 2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

例13. 已知 $a(2,1,1)$,$b(1,-1,1)$, 求与a和b都垂直的单位向量.

解: 设 $c = a \times b$, 则c同时垂直于a和b

于是，c上的单位向量是所求的单位向量

因为 $c = a \times b = 2i - j - 3k$

$$|c| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

所以 $$e_c = \frac{c}{|c|} = \left| \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right|$$

$$-e_c = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

都是所求的单位向量.

四、小结

1. 向量的概念

向量的概念（注意与标量的区别）

向量的加减法（平行四边形法则）

向量与数的乘法（注意数乘后的方向）

向量在轴上的投影与投影定理.

向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标.

（注意分向量与向量的坐标的区别）

向量的模与方向余弦的坐标表示式.

2. 向量运算

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 则

加减: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

数乘: $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

叉积: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

3. 向量关系

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

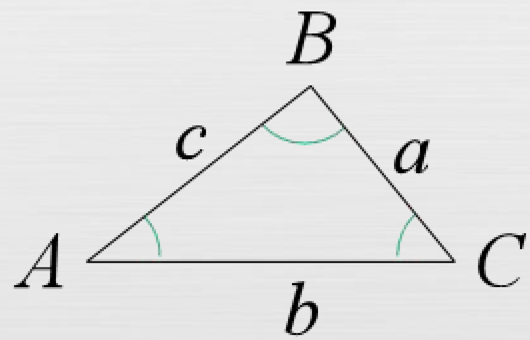
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

1. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

1. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



证: 由三角形面积公式

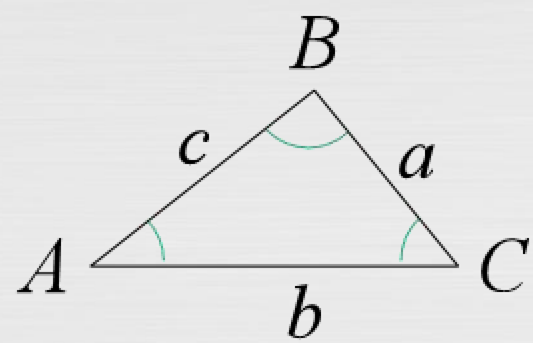
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|$$

因 $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=b\cdot c\cdot\sin A$

$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=c\cdot a\cdot\sin B$

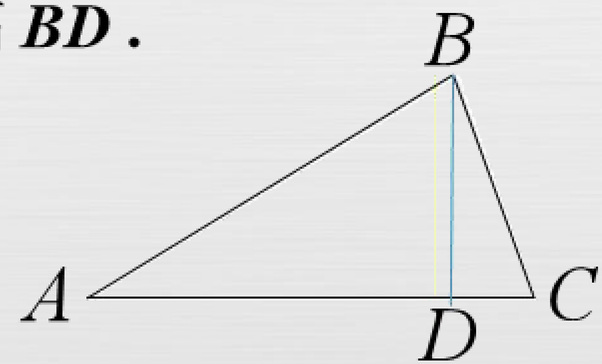
$|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}|=a\cdot b\cdot\sin C$



所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

2. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中， 求 $\boldsymbol{AC}$ 边上的高 $\boldsymbol{BD}$.

2. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD.



解： $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}=1$$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$

故有 $1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD|$ $\quad\therefore\quad |BD|=\frac{2}{5}$

3. 求在 xoy 坐标面上与向量 $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量.

解: 设所求的向量为 $\boldsymbol{b}=\{x,y,z\}$. 因为它在 xy 坐标面上, 所以 $z=0$. 又因为 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量且与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,

所以 $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 即有

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ -4x+3y+7z=0. \end{cases}$$

解之得 $x=\pm\dfrac{3}{5}, y=\pm\dfrac{4}{5}, z=0$

故所求向量 $\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{5}\boldsymbol{i}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{j}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{3}{5}\boldsymbol{i}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{j}$.

4. 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 x轴和y轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$，如果 P_1的坐标为$(1,0,3)$，求P_2的坐标.

解：设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x, y, z),

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow z = 4, \ z = 2,$$

P_2的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$.

提高题

1. 已知 $\vec{a}=\vec{i},\ \vec{b}=\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

求一单位向量 $\vec{n}^0$, 使 $\vec{n}^0\perp\vec{c}$, 且 $\vec{n}^0,\vec{a},\vec{b}$ 共面.

2. 已知向量 $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$,

证明 $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

3. 设 $a=(2,-1,-2)$, $b=(1,1,z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{a,b})$ 最小?

并求出此最小值.

提高题解答

1. 已知 $\vec{a}=\vec{i},\ \vec{b}=\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

求一单位向量 $\vec{n}^0$, 使 $\vec{n}^0\perp\vec{c}$, 且 $\vec{n}^0,\vec{a},\vec{b}$ 共面.

解: 设 $\vec{n}^0=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, 由题设条件得

$$\begin{cases} \left|\vec{n}^0\right|=1 \\ \vec{n}^0\perp\vec{c} \\ \vec{n}^0\perp\vec{a}\times\vec{b} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2y+z$$

解得 $\vec{n}^0=\pm(\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k})$.

2. 已知向量$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，

证明$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

解： $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\sin^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2[1-\cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})]$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

3. 设$a=(2,-1,-2)$, $b=(1,1,z)$, 问z为何值时$(\widehat{a,b})$最小？并求出此最小值.

解：$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$

因为当$0<(\widehat{a,b})<\dfrac{\pi}{2}$时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为单调减函数.

求$(\widehat{a,b})$的最小值,也就是求$f(z)=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$的最大值.

令，$f'(z)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}}=0$ 得$z=-4$.

当 $z=-4$时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $(\widehat{a,b})_{\min}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

向量及其运算

习题

一、重要知识点

1、向量: 既有大小又有方向的量,

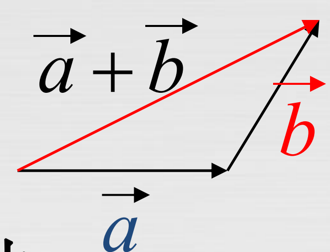
(1)向量的几何表示法

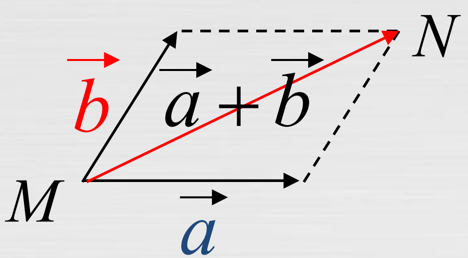
(2)向量的坐标表示法

2、向量的线性运算

(1)向量的几何运算法

1)向量的加法、减法、





平行四边形法、三角形法。

2)向量与数的乘法

向量 $\vec{a}$ 与数λ的乘积是一个向量

(2) 向量的坐标运算

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 则

加减: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

数乘: $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

叉积: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

3. 向量关系

$$\vec{a} // \vec{b} \rightleftarrows \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightleftarrows \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightleftarrows \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightleftarrows a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

4、数量积在几何中的应用

(1) 求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

(2) 求两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

7. 三个力 $\mathbf{F}_1=(1,2,3),\mathbf{F}_2(-2,3,-4),\mathbf{F}_3(3,-4,5)$ 同时作用于一点，求合力R的大小和方向余弦.

解： R=（1-2+3，2+3-4，3-4+5）=（2，1，4）

$$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

10. 已知单位向量a与x轴正向夹角为$\frac{\pi}{3}$，与其在xoy平面上的投影向量的夹角为$\frac{\pi}{4}$. 试求向量a.

解:设 $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ 则有

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=a_x\,(|\bar{a}|=1,|\bar{i}|=1)$$

求得 $a_x=\frac{1}{2}$

设 $\vec{a}$ 在xoy面上的投影向量为 $\vec{b}$, 则有$\vec{b}=\{a_x, a_y, 0\}$

则 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{ax^2+ay^2}{\sqrt{ax^2+ay^2}}$

则 $a_y^2=\frac{1}{4}$ 求得 $a_y=\pm\frac{1}{2}$

$\left|\vec{a}\right| = 1$, 则 $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$

从而求得 $\vec{a} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ 或 $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

12. 已知点P到点$A(0,0,12)$的距离是7，$\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦是 $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}$. 求点$P$的坐标.

解： 设P的坐标为（x, y, z），$|\overrightarrow{PA}|^2 = x^2 + y^2 + (z-12)^2 = 49$

得 $x^2 + y^2 + z^2 = -95 + 24z$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 6,\ \ z_2 = \frac{570}{49}$$

又 $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,\ \ x_2 = \frac{190}{49}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 3,\ \ y_2 = \frac{285}{49}$$

故点P的坐标为P（2，3，6）或 $P(\frac{190}{49},\frac{285}{49},\frac{570}{49})$

13. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$，计算:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$

解(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\varphi\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}\times3\times4$$

$$=-\frac{1}{2}\times3\times4=-6$$

解(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$$=3|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4|\boldsymbol{b}|^2$$

$$=3\times3^2+4\times(-6)-4\times16$$

$$=-61.$$

14. 已知$a=(4,-2,4)$,$b=(6,-3,2)$计算:

(1) $a\cdot b$　　(2) $(3a-3b)\cdot(a+b)$　　(3) $|a-b|^2$

解(1) $a\cdot b=4\times 6+(-2)\times(-3)+4\times 2=38$

解(2) $(2a-3b)\cdot(a+b)=2a\cdot a+2a\cdot b-3a\cdot b-3b\cdot b$

$=2|a|^2-a\cdot b-3|b|^2$

$=2\times[4^2+(-2)^2+4^2]-38-3[6^2+(-3)^2+2^2]$

$=2\times 36-38-3\times 49=-113$

解(3) $|a-b|^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a-2a\cdot b+b\cdot b$

$=|a|^2-2a\cdot b+|b|^2$

$=36-2\times 38+49=9$

15. 已知$a=3i+2j-k, b=i-j+2k$,求:

(1) $a\times b$; (2) $2a\times 7b$; (3) $7b\times 2a$;

(4) $a\times a$;

解(1) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$$

解(2) $2\boldsymbol{a}\times 7\boldsymbol{b}=14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=42\boldsymbol{i}-98\boldsymbol{j}-70\boldsymbol{k}$

解(3) $7\boldsymbol{b}\times 2\boldsymbol{a}=14(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-42\boldsymbol{i}+98\boldsymbol{j}+70\boldsymbol{k}$

解(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$

16 已知向量 $\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互相垂直，且$|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$，计算:

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ (2) $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$

解(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$= |-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$

$= 2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 24$

解(2) $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})| = |3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$= |7(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})|$

$= 7\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{2} = 84$

1. 设点 A 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$，则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限，故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$，于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\,\overrightarrow{OA}^{\circ} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

2. 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$, 求以向量 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 为边的平行四边形的对角线的长度.

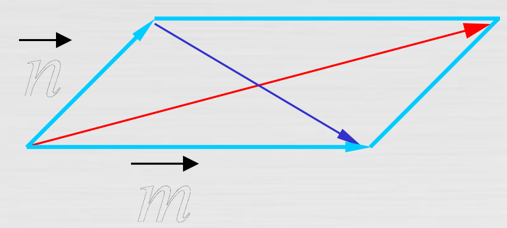
解: 对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|$, $|\vec{m}-\vec{n}|$

$$\because \quad \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$$

$$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$$

$$\therefore \quad |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$$

$$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$$



该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$

3. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & ① \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a} = (2,1,2), \vec{b} = (-1,1,-2)$.

解: 2×① −3×②，得

$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y} = \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{b}) = (11,-2,16)$$