一、重要知识点

1. 空间曲面 ⟷ 三元方程 $F(x,y,z)=0$

- 球面: 如,$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 柱面: 如,曲面$F(x,y)=0$,表示母线平行 z 轴的柱面.
- 旋转曲面: 如, 曲线$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ,z)=0$$

2. 二次曲面 ⟶ 三元二次方程, 截痕法.

- 椭球面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 双曲面:

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

• **抛物面：** 椭圆抛物面　　双曲抛物面

$(p,q$ 同号)　　$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$　　$-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

3. 空间曲线方程.

一般方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$　　参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

空间曲线在坐标面上的投影.

$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$　　$\begin{cases}R(y,z)=0\\x=0\end{cases}$　　$\begin{cases}T(x,z)=0\\y=0\end{cases}$

在xoy面上　　在yoz面上　　在xoz面上

1. 建立以点(1,3，-2)为中心,且通过坐标原点的球面方程.

解： 球的半径为 $R=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$

设(x,y,z)为球面上任一点，

则$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$

即通过坐标原点的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$$

2. 作出下列曲面所围成的立体的图形：

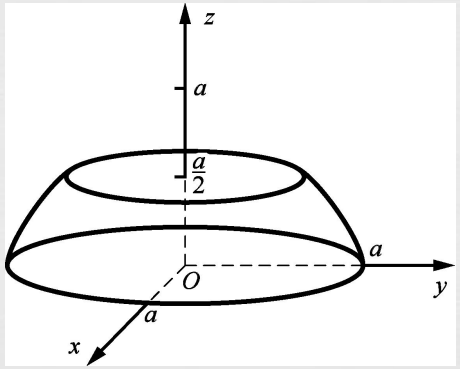
$(1)x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $z=0, z=\dfrac{a}{2}\left(a>0\text{为常数}\right)$

$(2)x+y+z=4$ 及 $x=0, x=1, y=0, y=2$ 及 $z=0$

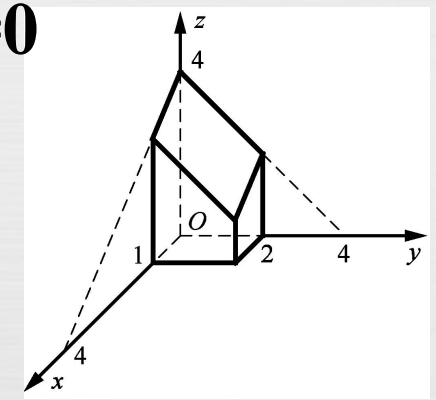
$(3)z=4-x^2, x=0, y=0, z=0$ 及 $2x+y=4$

$(4)z=6-(x^2+y^2), x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y=1$

解：（1） 如图

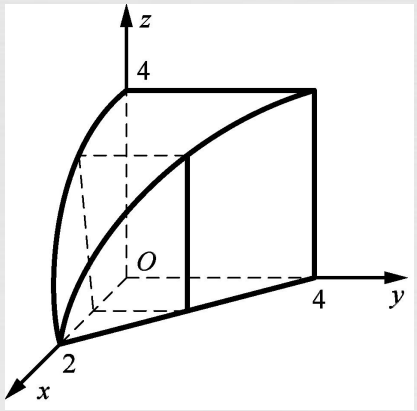


(2)$x+y+z=4$及$x=0,x=1,y=0,y=2$及 $z=0$



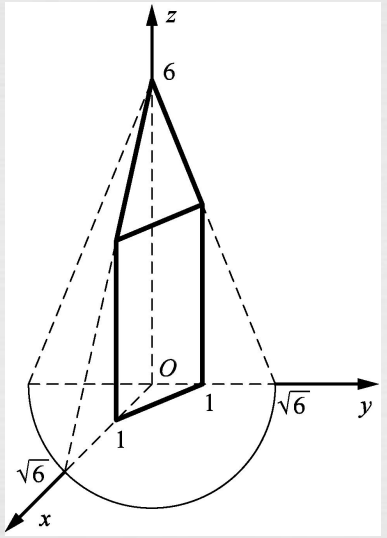
解：（2）如图

(3)$z=4-x^2,x=0,y=0,z=0$及$2x+y=4$



解：（3）如图

(4) $z=6-(x^2+y^2),x=0,y=0,z=0$及$x+y=1$



解：（4） 如图

3. 求下列曲面和直线的交点：

(1) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 与 $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$

(2) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$ 与 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$

解：（1）直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=3+3t \\ y=4-6t \\ z=-2+4t \end{cases}$$

代入曲面方程解得 $t=0, t=1$.

得交点坐标为（3，4，-2），（6，-2，2）.

(2) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$ 与 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$

解：（2）直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=4t \\ y=-3t \\ z=-2+4t \end{cases}$$

代入曲面方程解得 $t=1$.

得交点坐标为（4，-3，2）

4. 求曲线$x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=z^2$在*xoy*面上的投影曲线.

解： 消去*z*得

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$$

以曲线为准线，母线平行于*z*轴的柱面方程

故曲线在*xOy*面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

5. 建立曲线 $x^2+y^2=z, z=x+1$ 在xoy平面上的投影方程.

解： 消去z得

$x^2+y^2=x+1$ 即 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4}$

以曲线为准线，母线平行于z轴的柱面方程

故曲线在xOy面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases}(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4}\\ z=0\end{cases}$$