高等数学习题课

数据科学与工程学院

王婧

1.平面基本方程

一般式　$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \qquad (abc\neq 0)$

2.平面与平面之间的关系

垂直：$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行：$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$

3. 空间直线方程

一般式 $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

对称式 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

参数式 $$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

$$(m^2+n^2+p^2\neq 0)$$

4. 线与线的关系

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

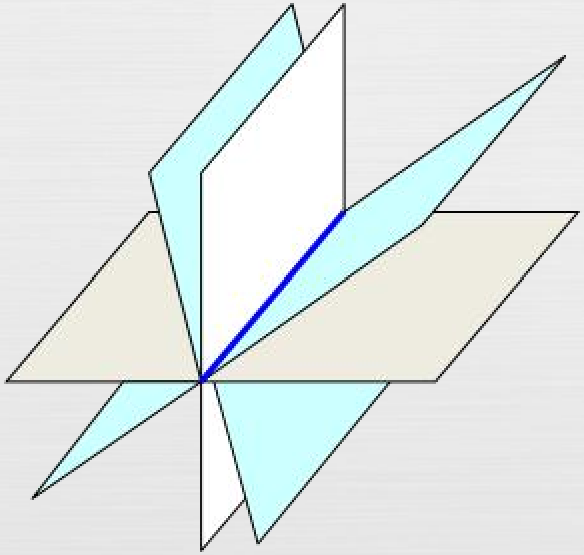
5. 面与线间的关系

$$\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{\Pi} \Longleftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$\mathbf{L} // \mathbf{\Pi} \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

6. 相关的几个问题



(1) 过直线 $L: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

的平面束方程

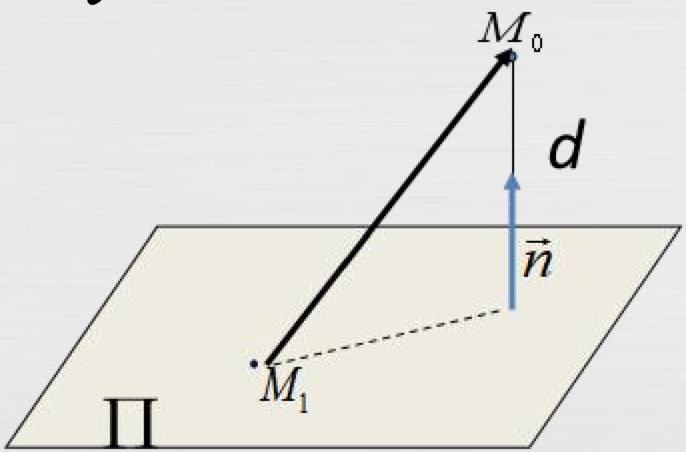
$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

(λ_1, λ_2不全为零)

(2)点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$的距离

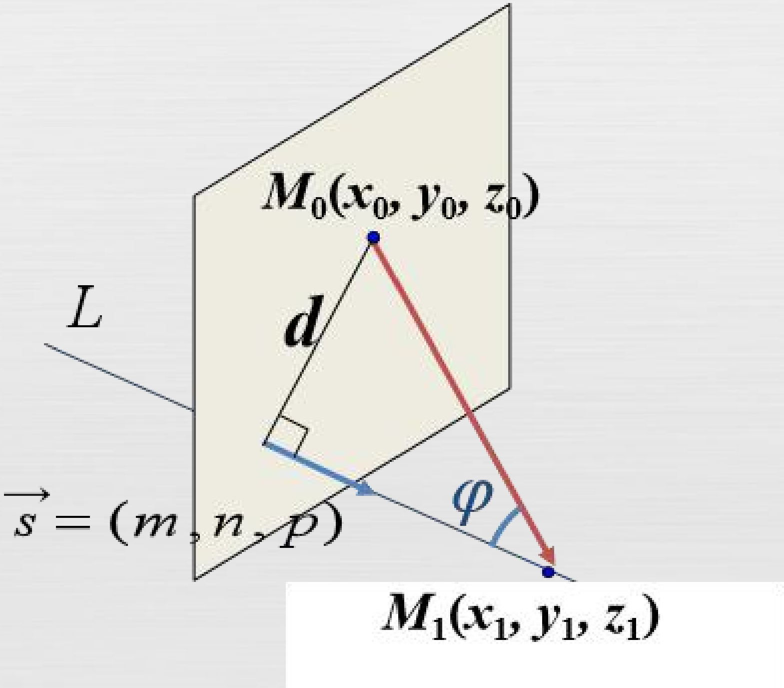
$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



(3) 点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到直线

$$L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$



的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{matrix} \right\|$$

例1、已知四点$A(1,-2,3)$,$B(4,-4,-3)$,$C(2,4,3)$,$D(8,6,6)$,求向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{CD}$上的投影.

解:

$$\mathrm{Pr}\, j_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$$

例1、已知四点A(1，-2，3),B(4，-4，-3),C(2，4，3),
D(8，6，6),求向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{CD}$上的投影.

解：$\overrightarrow{AB}=\{3，-2，-6\}$，$\overrightarrow{CD}=\{6，2，3\}$

$$\mathrm{Pr}\, j_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$$

$$=\frac{3\times6+(-2)\times2+(-6)\times3}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}$$

$$=-\frac{4}{7}.$$

例2. 若向量$a+3b$垂直于向量$7a-5b$，向量$a-4b$垂直于向量$7a-2b$,求a和b的夹角.

解：

$$(a+3b)\cdot(7a-5b)=0$$

$$(a-4b)\cdot(7a-2b)=0$$

$$\frac{a\cdot b}{|a|^2} : \quad \frac{a\cdot b}{|b|^2}$$

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$$

例2. 若向量*a*+3*b*垂直于向量7*a*-5*b*，向量*a*-4*b*垂直于向量7*a*-2*b*,求*a*和*b*的夹角.

解: $(a+3b)\cdot(7a-5b) = 7|a|^2+16a\cdot b-15|b|^2=0$ (1)

$(a-4b)\cdot(7a-2b) = 7|a|^2-30a\cdot b+8|b|^2=0$ (2)

由①及②可得: $\dfrac{a\cdot b}{|a|^2}=\dfrac{a\cdot b}{|b|^2}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \frac{(a\cdot b)^2}{|a|^2|b|^2}=\frac{1}{4}$$

又 $a\cdot b=\dfrac{1}{2}|b|^2>0$

所以 $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{1}{2}$

故 $\theta=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

例3.

一平行四边形以向量a=(2,1,-1)和b=(1,-2,1)为邻边，求其对角线夹角的正弦.

解：两对角线向量为

$$\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

$$\because \boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$$

$$\therefore |\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2|=|2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}|=\sqrt{140}$$

$$|\boldsymbol{l}_1|=\sqrt{10},\quad |\boldsymbol{l}_2|=\sqrt{14}$$

所以 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2|}{|\boldsymbol{l}_1||\boldsymbol{l}_2|}=\dfrac{\sqrt{140}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{14}}=1$

即为所求对角线间夹角的正弦.

例4. 已知$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z),\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z),\mathbf{c}=(c_x,c_y,c_z)$.试证明:

(1) 三向量*a,b,c*共面的充要条件是 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$

(2) 三向量*a,b,c*不共面,则 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$

证(1): $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$

则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{C}=(a_yb_z-a_zb_y)C_x+(a_zb_x-a_xb_z)C_y+(a_xb_y-a_yb_x)C_y$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

若$\vec{a},\vec{b},\vec{C}$ 共面，则有$\vec{a}\times\vec{b}$与 $\vec{C}$ 是垂直的.

从而 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{C}=0$, 反之亦成立.

证(2): $\because (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{C} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

$$(\vec{b}\times\vec{C})\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ C_x & C_y & C_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{C}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

由行列式性质可得:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ C_x & C_y & C_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

故 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{C} = (\vec{b}\times\vec{C})\cdot\vec{a} = (\vec{C}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

例5.叉积的几何意义：

四面体的顶点在 (1,1,1), (1,2,3), (1,1,2) 和 (3,-1,2), 求四面体的表面积.

解：设四顶点依次取为A, B, C, D.

$$\overrightarrow{AB}=\{0,1,2\},\quad \overrightarrow{AD}=\{2,-2,1\}$$

则由A，B，D三点所确定三角形的面积为

$$S_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

同理可求其他三个三角形的面积依次为$\frac{1}{2},\sqrt{2},\sqrt{3}$

故四面体的表面积

$$S=\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

例6. 设四面体的顶点为A(1,1,1),B(2,1,3),C(3,5,4)及D(5,5,5)

求该四面体的体积.

解：设四面体的底为ΔBCD

从A点到底面ΔBCD的高为h,则

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot h$$

$$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$$

h 为A到底ΔBCD所在的平面的距离

写出底所在平面的方程

计算点到平面的距离 $=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

例6. 设四面体的顶点为A(1,1,1),B(2,1,3),C(3,5,4)及$D(5,5,5)$

求该四面体的体积.

解: 设四面体的底为ΔBCD

从A点到底面ΔBCD的高为h,则

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot h$$

而 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{2}\left|-4\vec{i}-\vec{j}+8\vec{k}\right|=\frac{9}{2}$

又ΔBCD所在的平面方程为: $4x+y-8z+15=0$

则 $h=\dfrac{|4+1-8+15|}{\sqrt{16+1+64}}=\dfrac{4}{3}$

故 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}=2$

例7. 求满足下列各组条件的直线方程:

(1) 经过点(2,-3,4)且与平面$3x-y+2z-4=0$垂直;

(2) 过点(0,2,4)，且与两平面$y-3z=2$和$x+2z=1$平行;

(3) 过点(-1,2,1)，且与直线 $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{3}$ 平行.

解(1) 可取直线的方向向量为

$s=\{3，-1，2\}$

故过点（2，-3，4）的直线方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$$

(2) 过点(0,2,4)，且与两平面y-3z=2和x+2z=1平行；

解(2) 所求直线平行两已知平面，

且两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$不平行，

故所求直线平行于两平面的交线，

于是直线方向向量

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{-2, 3, 1\}$$

故过点（0，2，4）的直线方程为

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$$

(3) 过点(-1,2,1)，且与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$ 平行.

解(3) 所求直线与已知直线平行，

故其方向向量可取为 $s=\{2, -1, 3\}$

故过点（-1，2，1）的直线方程为

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$$

例8. 试确定出下列各题中直线与平面间的关系：

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和$4x-2y-2z=3$

解(1) 因为直线的方向向量为$s=\{-2，-7，3\}$

平面的法向量 $n=\{4，-2，-2\}$，

所以 $s\cdot n=(-2)\times 4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$

于是直线与平面平行.

又因为直线上的点$M_0(-3，-4，0)$代入平面方程有

$$4\times(-3)-2\times(-4)-2\times 0=-4\neq 3$$

故直线不在平面上.

所以直线与平面平行而不包含.

$(2)\ \frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 和$3x-2y+7z=8$

解(2) 因直线方向向量s等于平面的法向量，

故直线垂直于平面.

$(3)\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和$x+y+z=3$

解(3) 因为$3\times1+1\times1+(-4)\times1=0$

而直线上的点（2，-2，3）在平面上.

故直线在平面上

例9.

求过点(1,-2,1)且垂直于直线 $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ 的平面方程.

解：直线的方向向量为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

取平面法向量为{1，2，3}，

故所求平面方程为

$$1\times(x-1)+2(y+2)+3(z-1)=0$$

即 $x+2y+3z=0$.

例10.

求过点$M(1,-2,3)$和两平面 $2x-3y+z=3, x+3y+2z+1=0$ 的交线的平面方程.

解： 设过两平面的交线的平面束方程为

$2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0,$ 其中λ为待定常数，

又因为所求平面过点（1，-2，3）

故 $2\times1-3\times(-2)+3-3+\lambda(1+3\times(-2)+2\times3+1)=0$

解得λ=-4.

故所求平面方程为

$$2x+15y+7z+7=0$$