高等数学习题课

数据科学与工程学院

王婧


砺儒云课堂
Liru Online Courses
首页
分类课程
平台操作指南
learnTV
数据统计
申请课程
首页 > 我的课程 > 高数习题课（下）
汕尾校区高等数学习题课（下）

空间直角坐标系

习题

一、重要知识点

1、空间直角坐标系

(1)空间直角坐标系共有三个坐标面，八个卦限

(2)空间两点$M_1(x_1、y_1、z_1)$、$M_2(x_2、y_2、z_2)$间距离

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特殊地：若两点$M(x,y,z)$,O(0,0,0)间距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

1. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

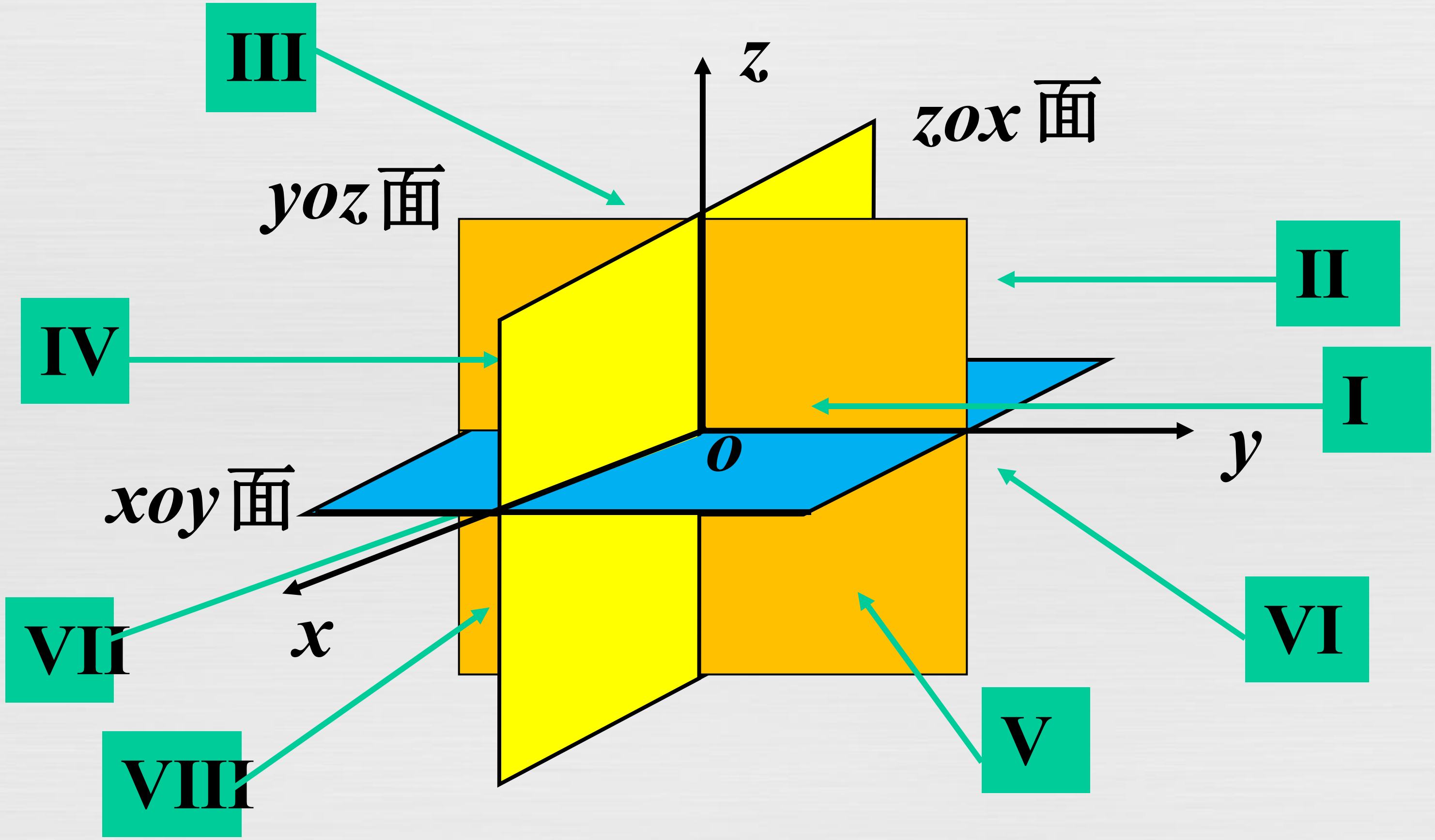
A(1,2,3)　　B(-2,3,4)　　C(2,-3,-4)

D(3,4,0)　　E(0,4,3)　　F(3,0,0)

解：

A(1,2,3)　B(-2,3,4)　C(2,-3,-4)

D(3,4,0)　E(0,4,3)　F(3,0,0)



点A在第I卦限；点B在第II卦限；点C在第VIII卦限

点D在xOy面上；点E在yOz面上；点F在x轴上.

2.xoy坐标面上的点的坐标有什么特点？

yoz面上的呢？

zox面上的呢？

解：

在xOy面上的点，$z=0$;

在yOz面上的点，$x=0$;

在zOx面上的点，$y=0$.

3. 对于x轴上的点，其坐标有什么特点？y轴上的点呢？z轴上的点呢？

解：x轴上的点，$y=z=0$;

y轴上的点，$x=z=0$;

z轴上的点，$x=y=0$.

4. 求下列各对点之间的距离：

(1)(0,0,0),(2,3,4) **(2)(0,0,0),(2,-3,-4)**

(3) (-2,3,-4),(1,0,3) **(4)(4,-2,3),(-2,1,3)**

解：

$$(1) s=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

$$(2) s=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{29}$$

$$(3) s=\sqrt{(1+2)^2+(0-3)^2+(3+4)^2}=\sqrt{67}$$

$$(4) s=\sqrt{(-2-4)^2+(1+2)^2+(3-3)^2}=3\sqrt{5}$$

5. 求点(4,-3,5)到坐标原点和各坐标轴间的距离.

解: 点 (4，-3，5)到x轴，y轴，z轴的垂足分别为

（4，0，0），（0，-3，0），（0，0，5）.

. 故

$$s_0=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$$

$$s_x=\sqrt{(4-4)^2+(-3-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34}$$

$$s_y=\sqrt{4^2+(-3+3)^2+5^2}=\sqrt{41}$$

$$s_z=\sqrt{4^2+(-3)^2+(5-5)^2}=5$$

6. 在z轴上求一点，使该点与两点A(-4,1,7)和B(3,5,-2)等距离.

解: 设此点为M（0，0，z），则

$$(-4)^2+1^2+(7-z)^2=3^2+5^2+(-2-z)^2$$

解得 $z=\dfrac{14}{9}$

即所求点为M（0，0，$\dfrac{14}{9}$）.

7. 试证:以三点$A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证: 因为$|AB|=|AC|=7$.且有

$$|AC|^2+|AB|^2=49+49=98=|BC|^2.$$

故$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

向量

向量的运算

一、重要知识点

1、向量: 既有大小又有方向的量,

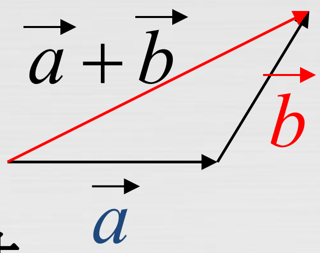
(1)向量的几何表示法

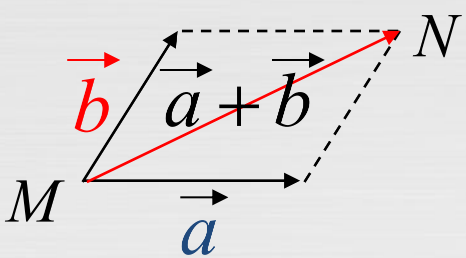
(2)向量的坐标表示法

2、向量的线性运算

(1)向量的几何运算法

1)向量的加法、减法、





平行四边形法、三角形法。

2)向量与数的乘法

向量 $\vec{a}$ 与数λ的乘积是一个向量

(2) 向量的坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$　　$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 则

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

3. 向量关系

$$\vec{a}//\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

4、数量积在几何中的应用

(1) 求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

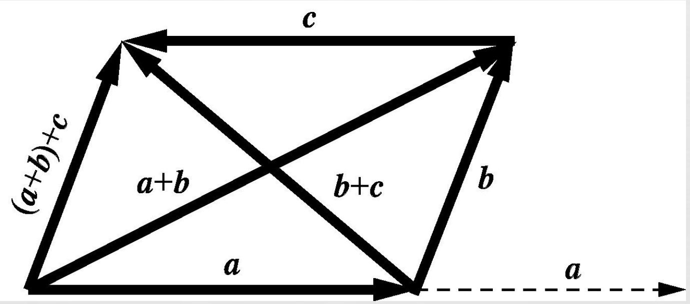
$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(2) 求两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

1. 验证: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

证明：利用三角形法则得证.见图



2. 设$u=a-b+2c$, $v=-a+3b-c$.试用a,b,c表示$2u-3v$

解：$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$$=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$$

$$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$$

4. 设向量$\overrightarrow{OM}$的模是4，它与投影轴的夹角是60° 求这向量在该轴上的投影.

解：设M的投影为M'，则

$$\mathrm{Pr\,j}_u \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

5. 一向量的终点为点$B(2,-1,7)$,它在三坐标轴上的投影依次是4,－4和7，求这向量的起点A的坐标.

解：设此向量的起点A的坐标$A(x, y, z)$，则

$$\overrightarrow{AB} = \{4, -4, 7\} = \{2 - x, -1 - y, 7 - z\}$$

解得 $x=-2, y=3, z=0$

故A的坐标为 $A(-2, 3, 0)$.

6. 一向量的起点是 $P_1(4,0,5)$，终点是 $P_2(7,1,3)$，试求:

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在各坐标轴上的投影;

(2) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模;

(3) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦;

(4) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向的单位向量.

解:(1)

$$a_x = \mathrm{Prj}_x \overrightarrow{P_1P_2} = 3,$$

$$a_y = \mathrm{Prj}_y \overrightarrow{P_1P_2} = 1,$$

$$a_z = \mathrm{Prj}_z \overrightarrow{P_1P_2} = -2.$$

(2) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(7-4)^2+(1-0)^2+(3-5)^2} = \sqrt{14}$

(3) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

$\cos\beta = \dfrac{a_y}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

$\cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{-2}{\sqrt{14}}$

(4) $\boldsymbol{e}_0 = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \{\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{-2}{\sqrt{14}}\}$

$$= \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$$

7. 三个力 $\mathbf{F}_1=(1,2,3),\mathbf{F}_2(-2,3,-4),\mathbf{F}_3(3,-4,5)$ 同时作用于一点，求合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向余弦.

解： $\boldsymbol{R}$=（1-2+3，2+3-4，3-4+5）=（2，1，4）

$$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

8. 求出向量$a=i+j+k,b=2i-3j+5k$和$c=-2i-j+2k$的模，并分别用单位向量$\mathrm{e}_a,\mathrm{e}_b,\mathrm{e}_c$来表达向量$a,b,c$.

解：$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=3$$

$$\boldsymbol{a}=\sqrt{3}\boldsymbol{e}_a,\quad \boldsymbol{b}=\sqrt{38}\boldsymbol{e}_b,\quad \boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_c.$$

9. 设$m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k, p=5i+j-4k$求向量$a=4m+3n-p$在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分向量.

解：$a=4(3i+5j+8k)+3(2i-4j-7k)-(5i+j-4k)$

$=13i+7j+15k$

在x轴上的投影$a_x=13$,

在y轴上分向量为$7j$.

10. 已知单位向量*a*与*x*轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与其在*xoy*平面上的投影向量的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. 试求向量*a*.

解:设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 则有

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=a_x\ (|\vec{a}|=1,|\vec{i}|=1)$$

求得 $a_x=\frac{1}{2}$

设 $\vec{a}$ 在*xoy*面上的投影向量为 $\vec{b}$，则有 $\vec{b}=\{a_x,a_y,0\}$

则 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{ax^2+ay^2}{\sqrt{ax^2+ay^2}}$

则 $a_y^2=\frac{1}{4}$ 求得 $a_y=\pm\frac{1}{2}$

$$\left|\vec{a}\right| = 1, \text{则} \ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

从而求得 $\vec{a} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ 或 $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

12. 已知点P到点$A(0,0,12)$的距离是7，$\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦是 $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}$. 求点$P$的坐标.

解： 设P的坐标为（x, y, z），$|\overrightarrow{PA}|^2 = x^2 + y^2 + (z-12)^2 = 49$

得 $x^2 + y^2 + z^2 = -95 + 24z$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{6}{7} \quad\Rightarrow\quad z_1 = 6,\ \ z_2 = \frac{570}{49}$$

又 $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{7} \quad\Rightarrow\quad x_1 = 2,\ \ x_2 = \frac{190}{49}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{3}{7} \quad\Rightarrow\quad y_1 = 3,\ \ y_2 = \frac{285}{49}$$

故点P的坐标为P（2，3，6）或 $P(\frac{190}{49},\frac{285}{49},\frac{570}{49})$

13. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$, 且$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$, 计算:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$

解(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\varphi\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

.

$$=\cos\frac{2\pi}{3}\times3\times4$$

$$=-\frac{1}{2}\times3\times4=-6$$

解(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$$=3|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4|\boldsymbol{b}|^2$$

$$=3\times3^2+4\times(-6)-4\times16$$

$$=-61.$$

14. 已知a=(4,-2,4),b=(6,-3,2)计算:

(1) $a\cdot b$　　(2) $(3a-3b)\cdot(a+b)$　　(3) $|a-b|^2$

解(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times6+(-2)\times(-3)+4\times2=38$

解(2) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=2|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2$

$=2\times[4^2+(-2)^2+4^2]-38-3[6^2+(-3)^2+2^2]$

$=2\times36-38-3\times49=-113$

解(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$

$=36-2\times38+49=9$

15. 已知$a=3i+2j-k, b=i-j+2k$,求:

(1) $a\times b$;　　(2) $2a\times 7b$;　(3) $7b\times 2a$;

(4) $a\times a$;

解(1) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$$

解(2) $2\boldsymbol{a}\times 7\boldsymbol{b}=14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=42\boldsymbol{i}-98\boldsymbol{j}-70\boldsymbol{k}$

解(3) $7\boldsymbol{b}\times 2\boldsymbol{a}=14(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-42\boldsymbol{i}+98\boldsymbol{j}+70\boldsymbol{k}$

解(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$

16 已知向量 $\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互相垂直，且$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$，计算:

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$　　(2) $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$

解(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$= |-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$

$= 2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\dfrac{\pi}{2} = 24$

解(2) $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})| = |3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$= |7(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})|$

$= 7\times3\times4\times\sin\dfrac{\pi}{2} = 84$