解析几何

数据科学与工程学院

王婧


砺儒云课堂
Liru Online Courses
首页
分类课程
平台操作指南
learnTV
数据统计
申请课程
智慧课室申请
首页 › 我的课程 › 2022-02-解析几何
2022-02-解析几何

第一部分　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

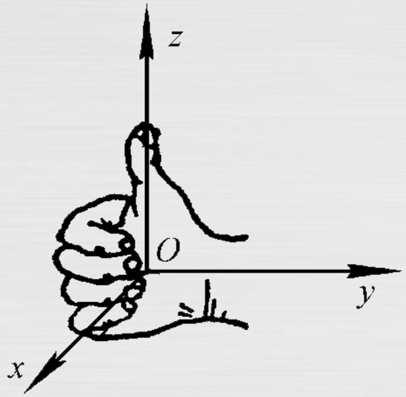
二、两点间的距离

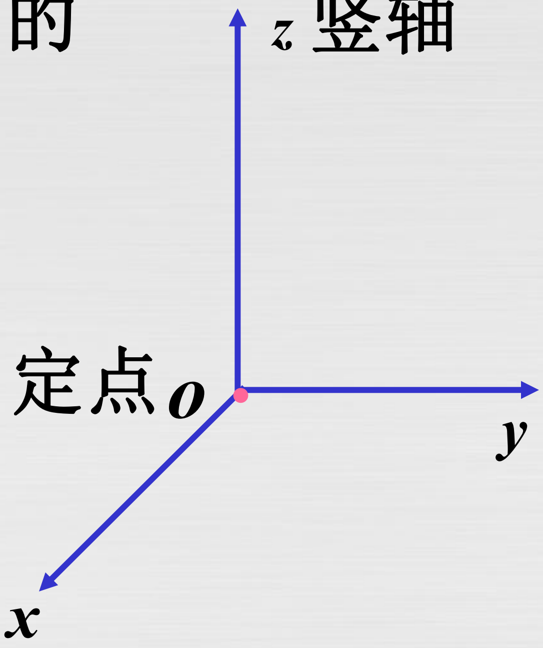
三、小结 思考题

一、空间直角坐标系

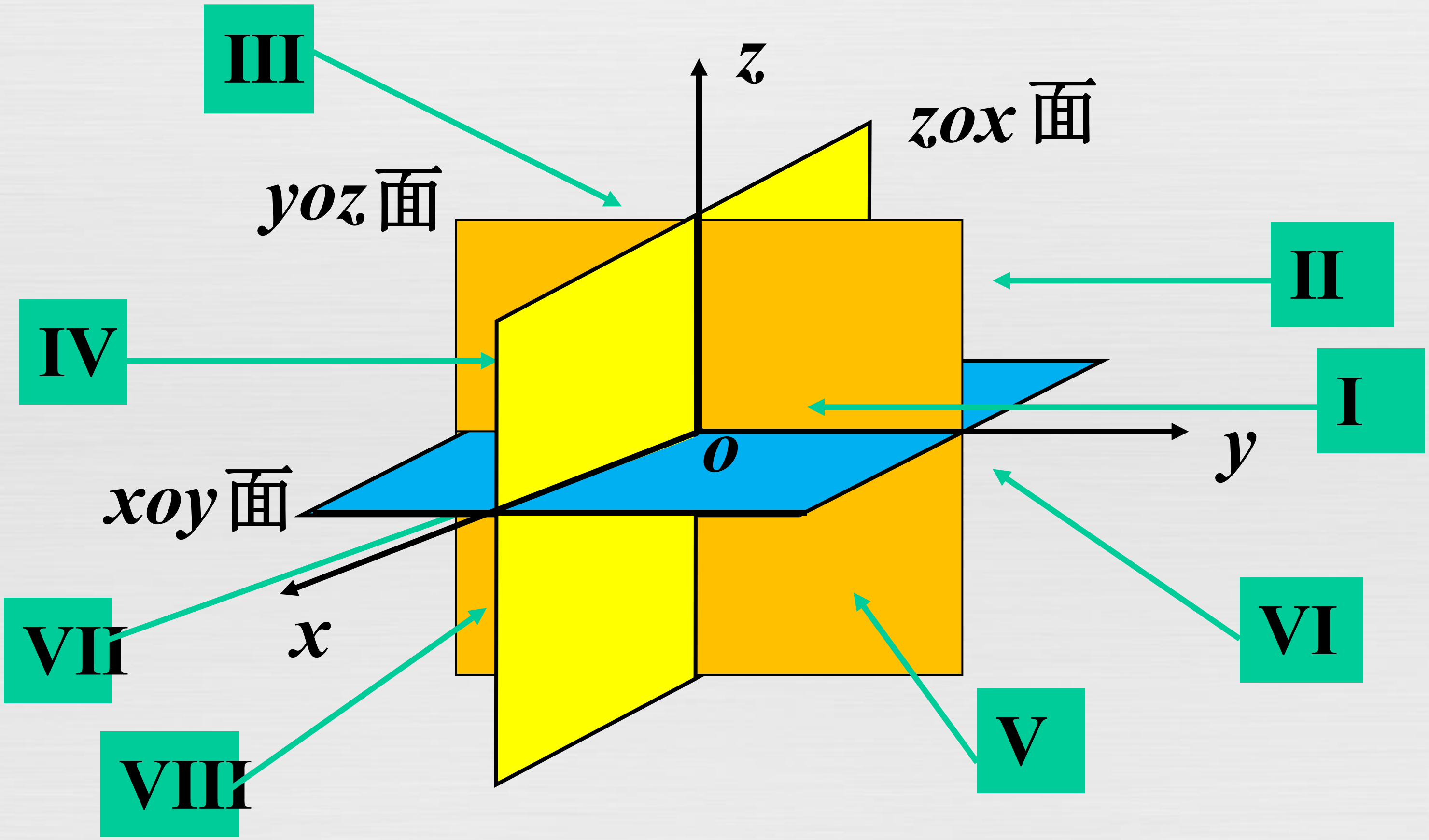
1. 空间直角坐标系的基本概念

过空间一定点 o，由三条互相垂直的数轴 按右手规则即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角度，转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向.





组成一个空间直角坐标系oxyz.



空间直角坐标系共有三个坐标面

八个卦限

在直角坐标系下

称为点 M 的坐标

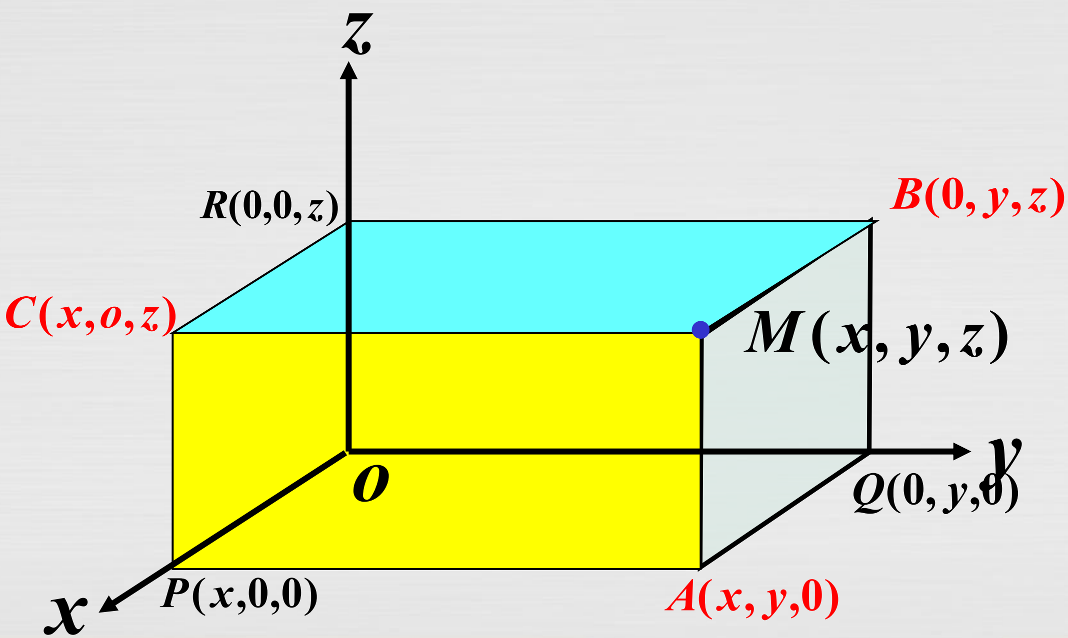
空间的点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组 (x, y, z)

过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴

坐标原点

坐标轴上的交点 P, Q, R

坐标面上的交点 A, B, C　　　$O(0,0,0)$



2. 空间两点间距离公式

设$M_1(x_1、y_1、z_1)$、$M_2(x_2、y_2、z_2)$为空间两点

$$d=\left|M_1M_2\right|=?$$

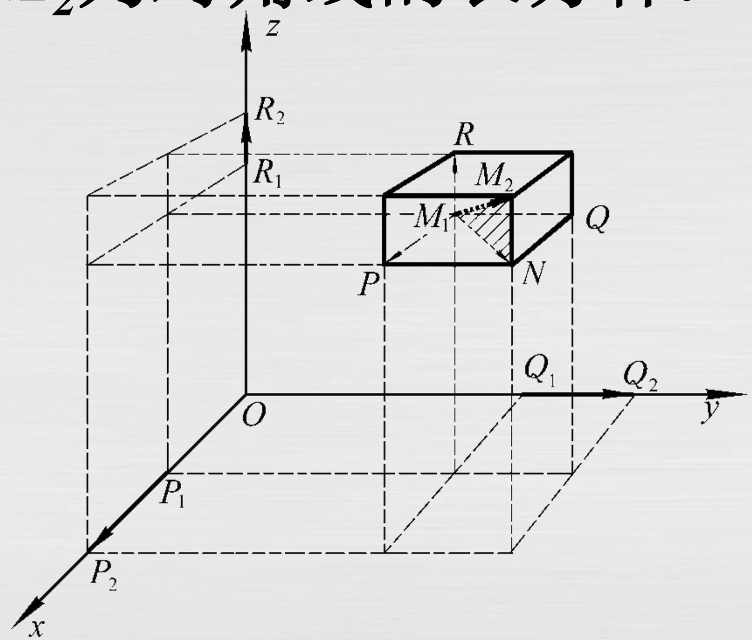
过M_1、M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面

这六个平面围成一个以M_1、M_2为对角线的长方体.

在直角ΔM_1NM_2

及直角 ΔM_1PN中,

使用勾股定理知

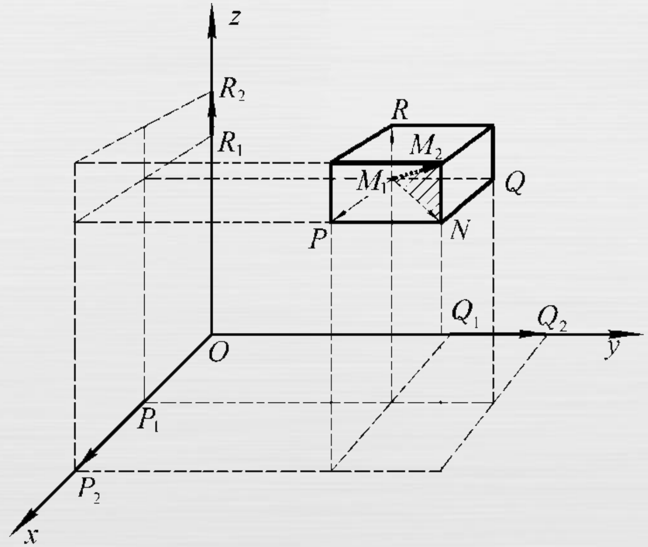


$$d^2=\left|\mathrm{M_1N}\right|^2+\left|\mathrm{NM_2}\right|^2$$
$$=\left|M_1P\right|^2+\left|PN\right|^2+\left|NM_2\right|^2$$

$$\because \left|M_1P\right| = \left|x_2 - x_1\right|,$$

$$\left|PN\right| = \left|y_2 - y_1\right|,$$

$$\left|NM_2\right| = \left|z_2 - z_1\right|,$$



$$\therefore d = \sqrt{\left|M_1P\right|^2 + \left|PN\right|^2 + \left|NM_2\right|^2}$$

$$\left|M_1M_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

空间两点间距离公式

特殊地：若两点分别为 $M(x, y, z)$，$O(0,0,0)$

$$d = \left|OM\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例1. 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解: $|M_1M_2|^2 = (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2 = 14,$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2 = 6,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2 = 6,$$

$\therefore |M_2M_3| = |M_3M_1|,$ 原结论成立.

例2. 设 P在x轴上，它到$P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点$P_2(0,1,-1)$的距离的两倍，求点 P的坐标.

解: 因为P在x轴上,设P点坐标为 $(x,0,0)$,

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$

$$\because |PP_1| = 2|PP_2|, \quad \therefore \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$$

$\Rightarrow x = \pm 1,$ 所求点为 $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

3. 小结

空间直角坐标系（轴、面、卦限）

空间两点间距离公式:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

空间直角坐标系

习题

一、重要知识点

1、空间直角坐标系

(1)空间直角坐标系共有三个坐标面，八个卦限

(2)空间两点M_1 (x_1、y_1、z_1)、M_2 (x_2、y_2、z_2)间距离

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特殊地：若两点$M(x,y,z)$,O(0,0,0)间距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

二、习题解答7—1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

A(1,2,3)　　B(-2,3,4)　　C(2,-3,-4)

D(3,4,0)　　E(0,4,3)　　F(3,0,0)

解： 点A在第I卦限；点B在第II卦限；点C在第VIII卦限
点D在xOy面上；点E在yOz面上；点F在x轴上.

2. xoy坐标面上的点的坐标有什么特点？yoz面上的呢？
zox面上的呢？

解： 在xOy面上的点，$z=0$;

在yOz面上的点，$x=0$;

在zOx面上的点，$y=0$.

3. 对于x轴上的点，其坐标有什么特点？y轴上的点呢？z轴上的点呢？

解: x轴上的点，$y=z=0$;

y轴上的点，$x=z=0$;

z轴上的点，$x=y=0$.

4. 求下列各对点之间的距离：

(1)(0,0,0),(2,3,4) **(2)(0,0,0),(2,-3,-4)**

(3) (-2,3,-4),(1,0,3) **(4)(4,-2,3),(-2,1,3)**

解：

$$(1)s=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

$$(2)s=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{29}$$

$$(3)s=\sqrt{(1+2)^2+(0-3)^2+(3+4)^2}=\sqrt{67}$$

$$(4)s=\sqrt{(-2-4)^2+(1+2)^2+(3-3)^2}=3\sqrt{5}$$

5. 求点(4,-3,5)到坐标原点和各坐标轴间的距离.

解: 点 (4，-3，5)到x轴，y轴，z轴的垂足分别为

（4，0，0），（0，-3，0），（0，0，5）.

. 故
$$s_0=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$$

$$s_x=\sqrt{(4-4)^2+(-3-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{34}$$

$$s_y=\sqrt{4^2+(-3+3)^2+5^2}=\sqrt{41}$$

$$s_z=\sqrt{4^2+(-3)^2+(5-5)^2}=5$$

6. 在z轴上求一点，使该点与两点A(-4,1,7)和B(3,5,-2)等距离.

解: 设此点为M（0，0，z），则

$$(-4)^2+1^2+(7-z)^2=3^2+5^2+(-2-z)^2$$

解得 $z=\dfrac{14}{9}$

即所求点为M（0，0，$\dfrac{14}{9}$）.

7. 试证:以三点$A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证: 因为$|AB|=|AC|=7$.且有

$$|AC|^2+|AB|^2=49+49=98=|BC|^2.$$

故$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

提高题

1.设点A位于第一卦限, 向径$\overrightarrow{OA}$与x轴y轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, 且$|\overrightarrow{OA}|=6$, 求点$A$的坐标 .

2. 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$, 求以向量 $\vec{m}, \vec{n}$ 为边的平行四边形的对角线的长度 .

3.求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中$\vec{a}=(2,1,2), \vec{b}=(-1,1,-2)$.

4. **(1)** 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 .

(2) 求在 xoy 面上与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(3) 求在空间与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

5. 设在坐标系 $[O; i, j, k]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z), 则在 $[A; i, j, k]$ 坐标系中,

点 M 的坐标为______________,

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为______________.

提高题解答

1. 设点 A 位于第一卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点 A 的坐标．

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$，则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限，故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$，于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}^{\circ} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

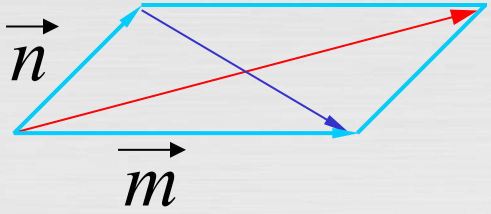
故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

2. 设 $\vec{m}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$, 求以向量 $\vec{m},\vec{n}$ 为边的平行四边形的对角线的长度 .

解: 对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|,\ |\vec{m}-\vec{n}|$

$$\because\quad \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$$

$$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$$



$$\therefore\quad |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$$

$$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$$

该平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$

3. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{a}}=(2,1,2),\vec{\boldsymbol{b}}=(-1,1,-2).$

解: 2×① −3×②，得

$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})\ =(11,-2,16)$$

4. (1) 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

(2) 在 xoy 面上求与 A , B 等距离之点的轨迹方程?

(3) 在空间求与 A , B 等距离之点的轨迹方程 ?

解: (1)设该点为 $M(0,0,z)$, 因为 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

解得 $z=\frac{14}{9}$, 故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

(2) 设动点为 $M(x,y,0)$, 利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0,\ 且\ z=0$$

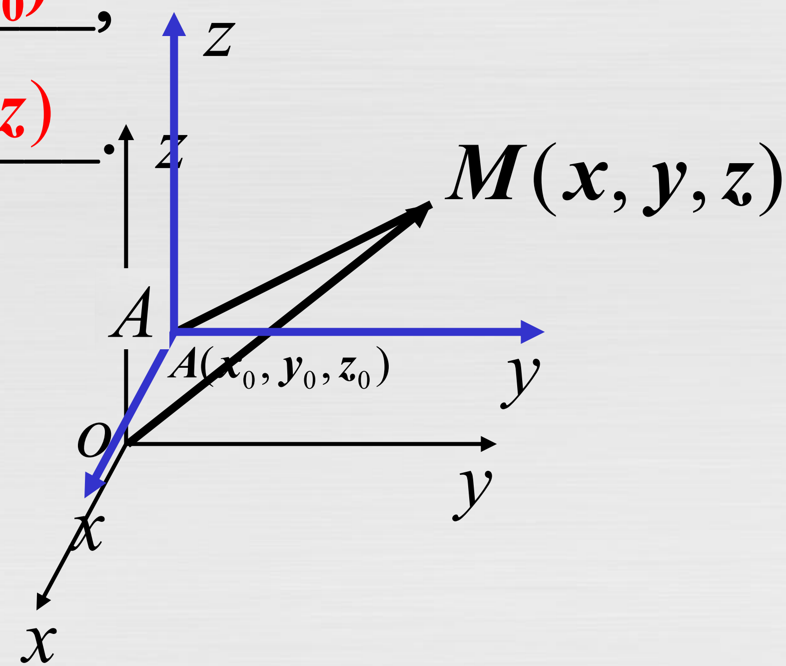
(3) 设动点为 $M(x,y,z)$, 利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$7x+4y-9z+14=0$$

5.设在坐标系$[O;\ i, j, k]$中点A和点M的坐标依次为(x_0, y_0, z_0)和(x, y, z)，则在$[A;\ i, j, k]$坐标系中，

点M的坐标为 $M(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 $\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$.



解: 自由向量与起点无关，它在某一向量上的投影不会因起点的位置的不同而改变.

向量

向量的运算

第二部分 向量及其运算

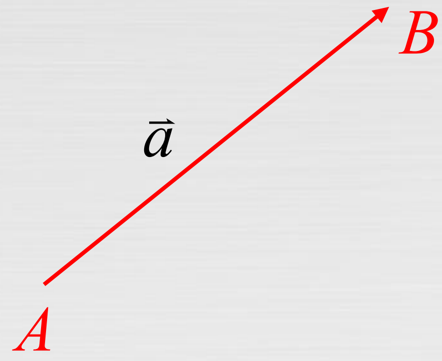
一、向量及其运算

（一）向量的概念

1. 向量

既有大小又有方向的量，称为向量，（或称为矢量. ）

2. 向量的几何表示法



用一条有方向的线段来表示向量.

以线段的长度表示向量的大小,

有向线段的方向表示向量的方向.

以A为起点，B为终点的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$

向量$\overrightarrow{AB}$的大小叫做向量的模. 记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或$|\vec{a}|$.

特别：模为1的向量称为单位向量.

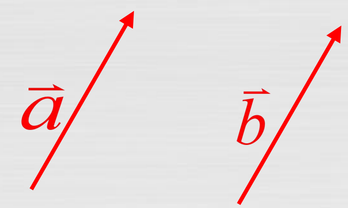
模为0的向量称为零向量.

方向是任意的.

3. 向量的相等

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 大小相等且方向相同,

称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等. 记作 $\vec{a}=\vec{b}$

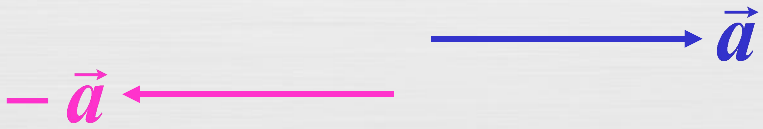


4. 自由向量

在空间中可以任意平移.

只有大小、方向, 而无特定起点的向量.

5. 负向量: 大小相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$



6. 平行向量: 方向相同或相反的两个非零向量.

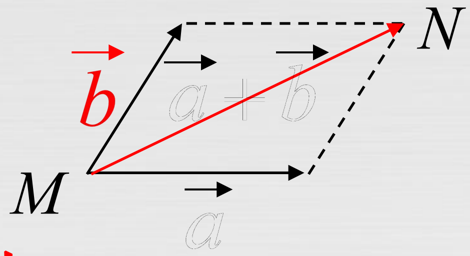
记作 $a//b$

（二）向量的线性运算

1. 向量的加法

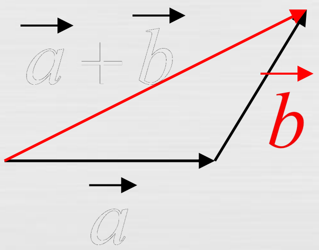
定义1 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为两个(非零)向量，把$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$平行移动使它们的始点重合于M，并以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，以点M为一端的对角线向量 $\overrightarrow{MN}$ 定义为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的和，

记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

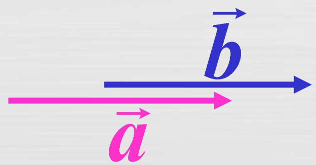


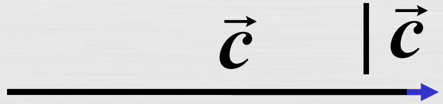
这种方法，叫做平行四边形法则：

三角形法则：

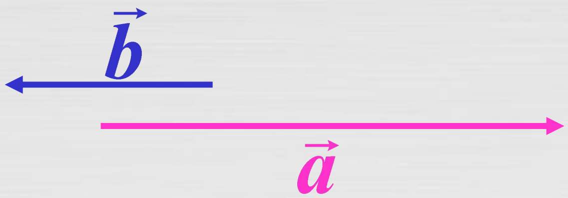


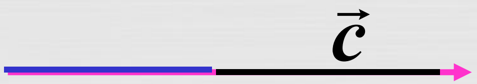
特殊地：若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 分为同向和反向





$$|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

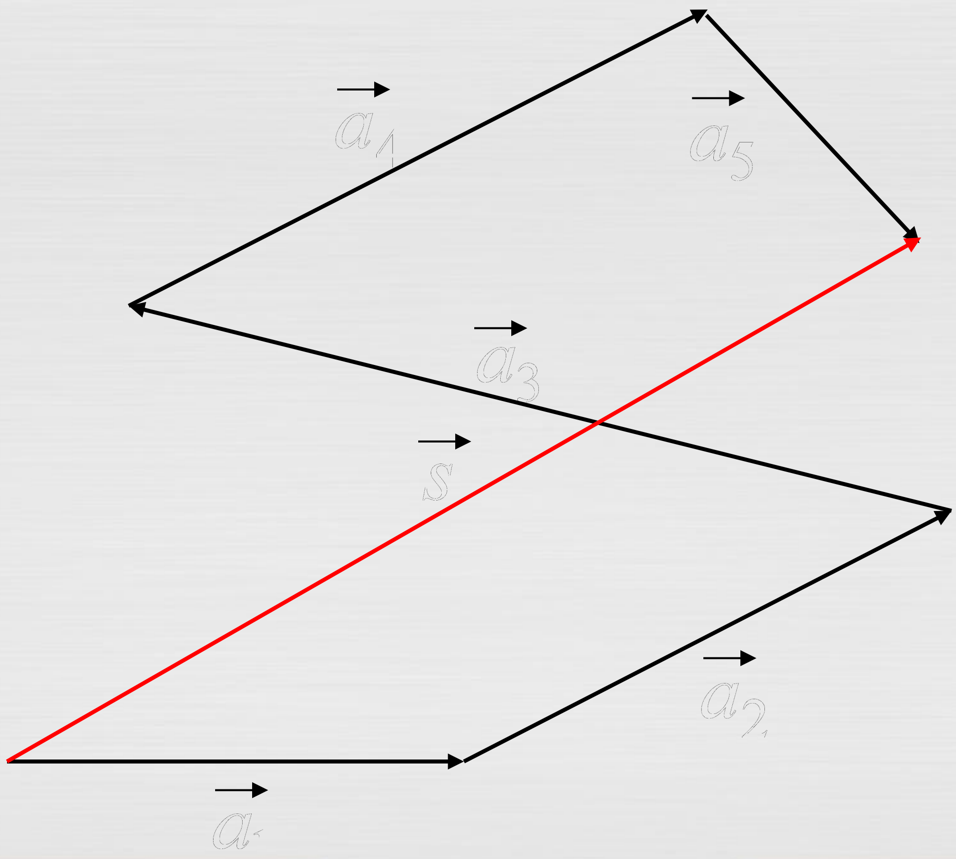




$$|\vec{c}| = \big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big|$$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

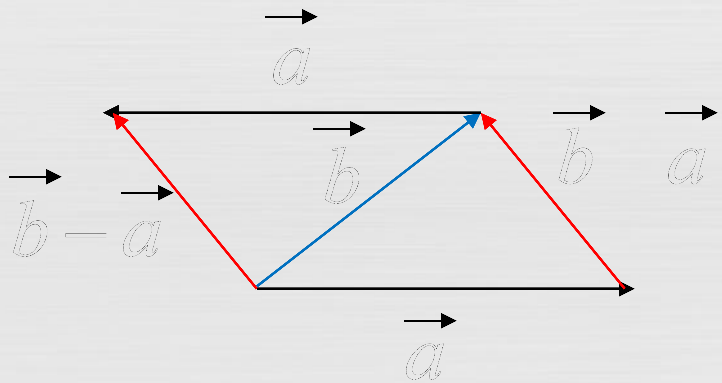
$$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5$$



2. 向量的减法

定义2 设a、b为两个(非零)向量，a的逆向量为$-a$，称向量b与$-a$的和为向量b与向量a的差.

即 $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$



特别当$\vec{b}=\vec{a}$时,有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

任何向量与零向量的和与差都等于该向量自己.

三角不等式

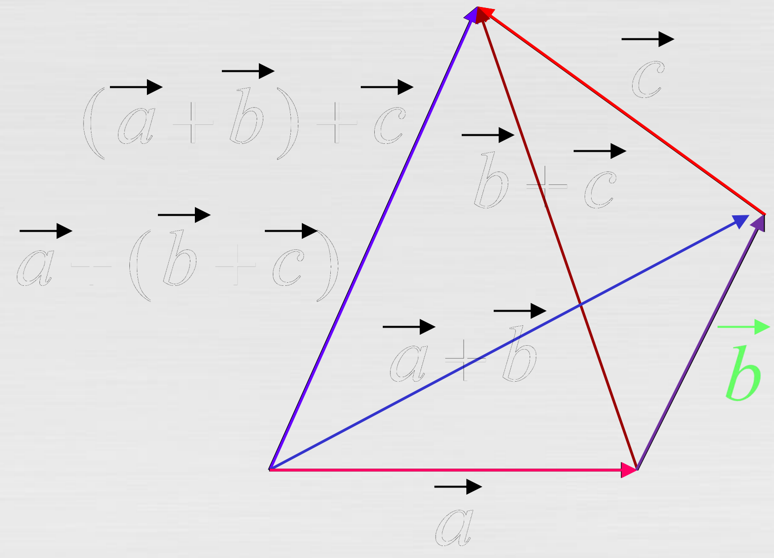
$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

向量加法的性质：

交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{-a})=0$

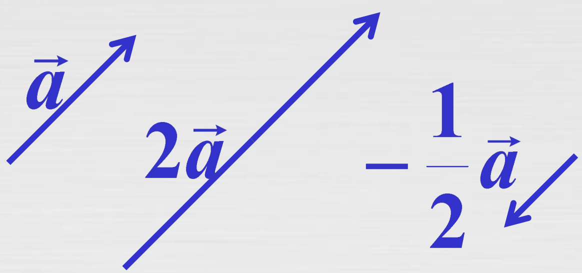
3. 向量与数的乘法

定义3 设λ是一个数，向量 $\vec{a}$ 与λ的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量规定为

(1) $\lambda > 0,\quad \lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$

(2) $\lambda = 0,\quad \lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0,\quad \lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$



定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \iff \vec{b} = \lambda\vec{a}$$

向量与数量乘法的性质　（λ、μ为实数)

$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$　(结合律)

$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$　(分配律)

$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$　(分配律)

设 e_a 是方向与a相同的单位向量，　则 $e_a = \dfrac{a}{|a|}$

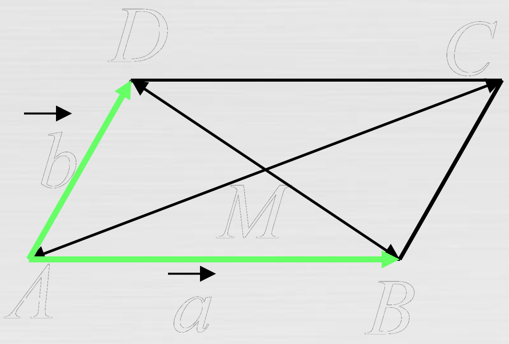
一个非零向量除以它的模就得到与它同向的单位向量.

例1. 设 M 为$\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$

$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$



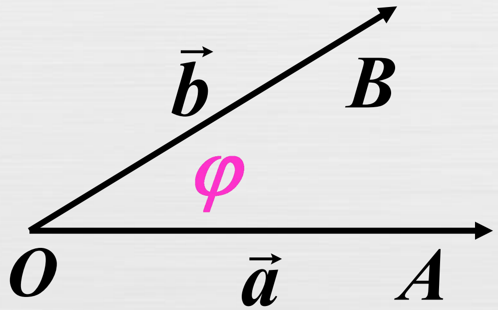
$\therefore\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

二、向量的坐标表示

1. 向量在轴上的投影

(1) 空间两向量的夹角



$$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0},$$

任取空间一点O，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\angle AOB$称为向量$\vec{a}$与向量 $\vec{b}$ 的夹角

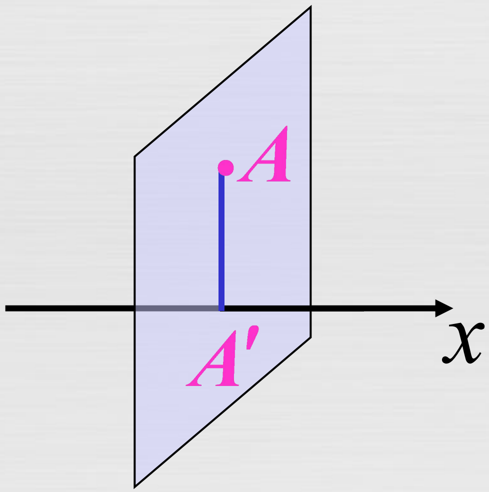
$$\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{b},\vec{a}}) \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

类似地，可定义向量与一轴或空间两轴的夹角.

特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

当a与b同向时 $\varphi=0$ ， 当a与b反向时$\varphi=\pi$

(2) 点A在轴上的投影



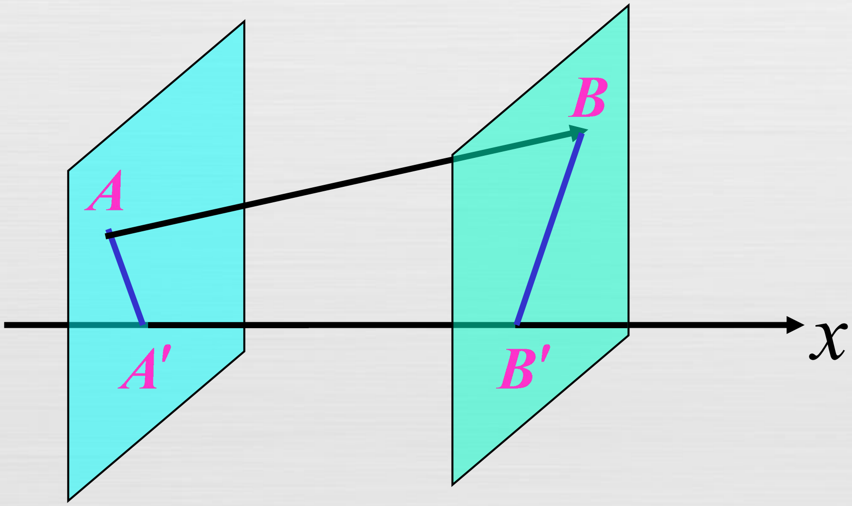
过点A作轴x的垂直平面，

交点A'

即为点A在轴x上的投影.

点A和A'之间的距离称为点A到x轴的距离。

(3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴上的投影



已知向量的起点A和终点B在轴x上的投影分别为A', B'，那么轴x上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值，称为向量在轴x上的投影.

向量$\overrightarrow{AB}$在轴 x 上的投影记为 $Prj_x \overrightarrow{AB} = A'B'$.

x轴叫做投影轴.

是一个数量

(4) 关于向量的投影的性质：

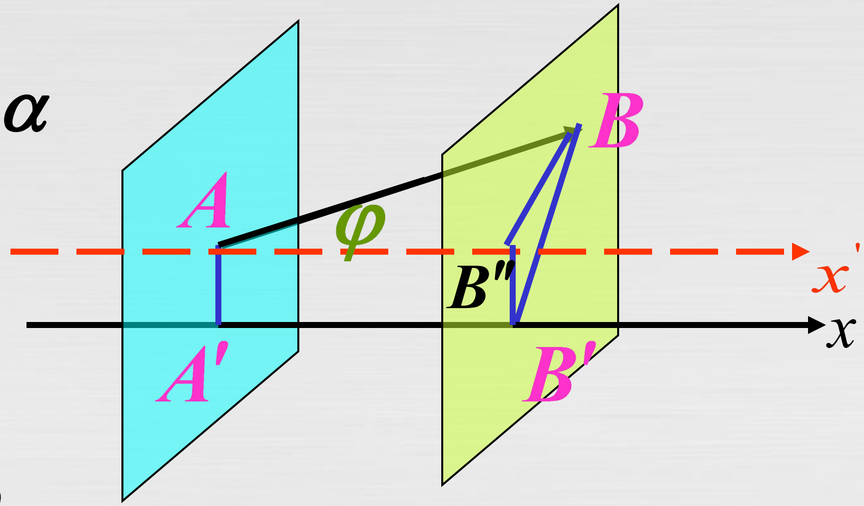
定理1 向量$\overrightarrow{AB}$ 在轴x上的投影等于向量的模乘以轴

与向量的夹角的余弦：$Prj_x\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$

证: 过A作与x轴平行，且有相同正向的x'轴,

则x轴与向量$\overrightarrow{AB}$间的夹角α

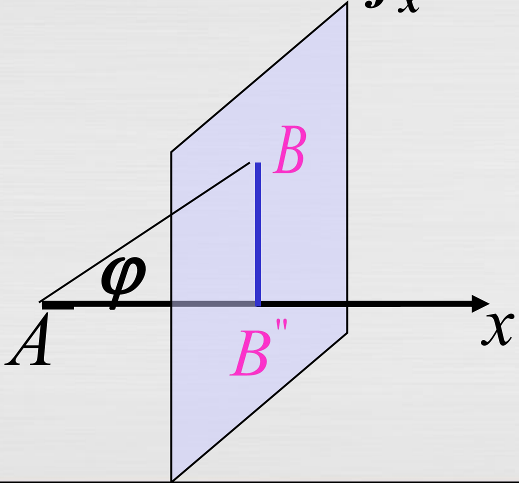
等于x'轴与向量$\overrightarrow{AB}$ 间的夹角α



从而有 $Prj_x\overrightarrow{AB} = Prj_{x'}\overrightarrow{AB}$

$= AB''$

$= |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$

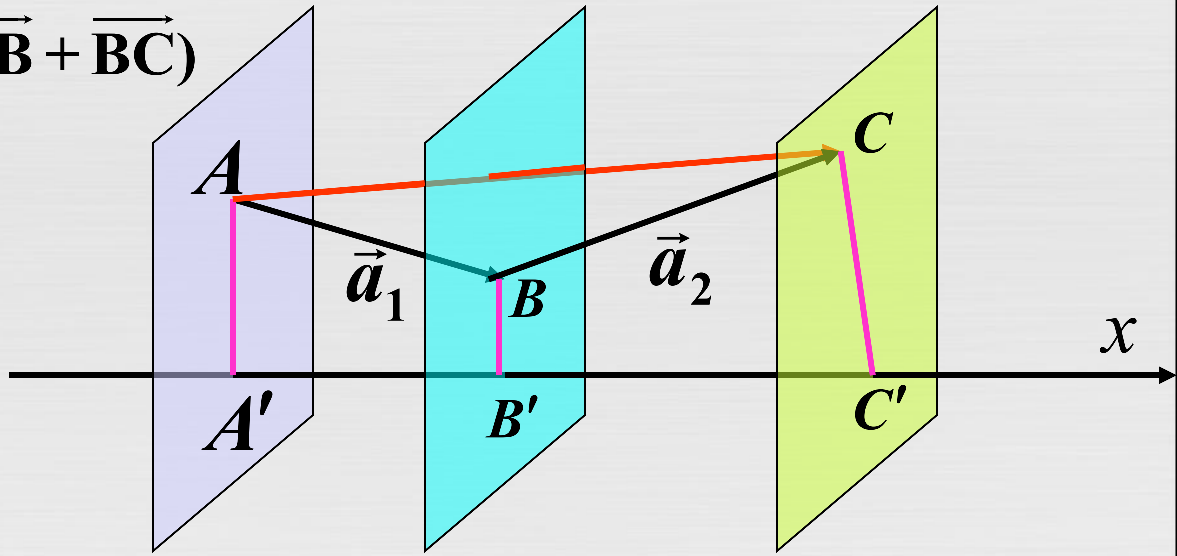


定理2 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和. $Prj_x(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=Prj_x\vec{a}_1+Prj_x\vec{a}_2$.

证： 设有两个向量a_1、a_2及某x轴。 如图

$$Prj_x(a_1+a_2)=Prj_x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$=Prj_x\overrightarrow{AC}=A'C'$$



而 $Prj_x a_1+Prj_x a_2$

$$=Prj_x\overrightarrow{AB}+Prj_x\overrightarrow{BC}$$

$$=A'B'+B'C'=A'C'$$

所以 $Prj_x(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=Prj_x\vec{a}_1+Prj_x\vec{a}_2$.

定理2 可推广到有限个向量的情形，即

$$Prj_x(a_1+a_2+\cdots+a_n)=Prj_x a_1+Prj_x a_2+\cdots+Prj_x a_n$$

注意： $Prj_x(\lambda\vec{a})=\lambda Prj_x\vec{a}.$

2. 向量的坐标表示

(1) 向量的分解

在空间直角坐标系下, 任意向量$\vec{r}$可用向径$\overrightarrow{OM}$表示.

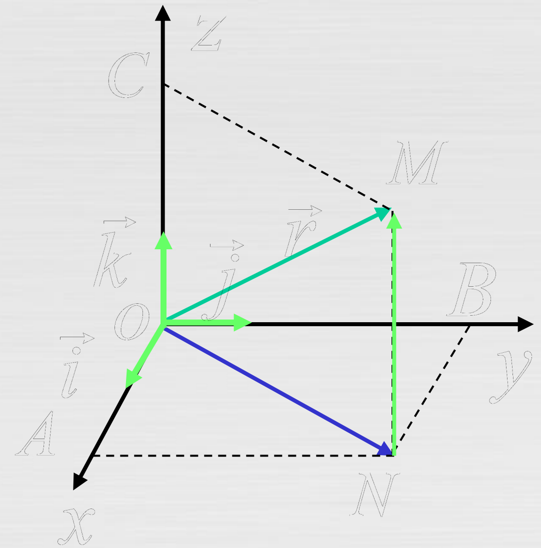
以$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分别表示沿x、y、z轴正向的单位向量,

设点 M 的坐标为$M(x,y,z)$, 则

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$



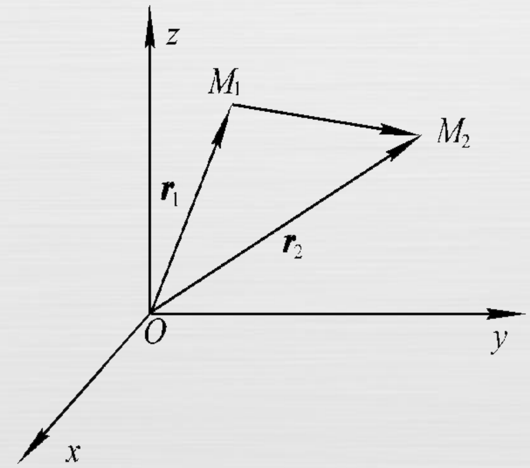
此式称为向量$\vec{r}$的坐标分解式,

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量$\vec{r}$沿三个坐标轴方向的分向量.

x、y、z三个数是向量r在三条坐标轴上的投影.

一般地，设向量 $a=\overrightarrow{M_1M_2}$，$M_1$、，$M_2$的坐标分别为

$M_1(x_1、y_1、z_1)$ 及 $M_2(x_2、y_2、z_2)$，



如图 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=r_2-r_1$

$$r_2=x_2i+y_2j+z_2k$$

$$r_1=x_1i+y_1j+z_1k$$

所以 $a=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2i+y_2j+z_2k)-(x_1i+y_1j+z_1k)$

$$=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

上式称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 按基本单位向量的分解式

也可写成 $a=a_xi+a_yj+a_zk.$

$$a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$$

三个数量是向量 $a=\overrightarrow{M_1M_2}$ 在三个坐标轴上的投影.

(2) 向量的坐标表示

向量 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x, a_y, a_z

叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标，表示为: $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$,

三个单位向量表示为 $=a_x i+a_y j+a_z k$

$i=(1,0,0)$ $j=(0,1,0)$ $k=(0,0,1)$

零向量的坐标表示式为 $O=(0,0,0)$

起点$M_1(x_1、y_1、z_1)$，终点 $M_2(x_2、y_2、z_2)$,

向量的坐标为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$a_x=x_2-x_1$, $a_y=y_2-y_1$, $a_z=z_2-z_1$;

向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标就是终点M的坐标, $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$

例2. 一向量的终点在点$B(2, -1, 7)$, 它在x轴、y轴和z轴上的投影依次为4, –4, 7. 求这向量的起点A的坐标.

解: 设点A的坐标为(x, y, z). 由已知得

$$\begin{cases} 2-x=4 \\ -1-y=-4 \\ 7-z=7 \end{cases}$$

解得 $x=-2, y=3, z=0$. 点A的坐标为$A(-2, 3, 0)$.

(3)向量的模与方向余弦的坐标表示

1⁰.向量的模

设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 有

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2⁰. 方向角

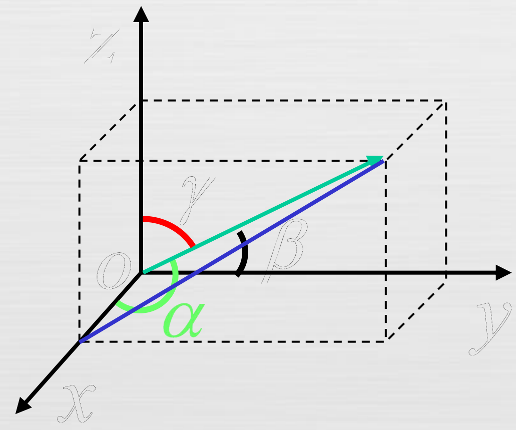
向量 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$ 与三坐标轴的夹角 α,β,γ

为方向角.

并规定 $0\leq\alpha\leq\pi,\quad 0\leq\beta\leq\pi,\quad 0\leq\gamma\leq\pi.$

3^0. 方向余弦的坐标表示

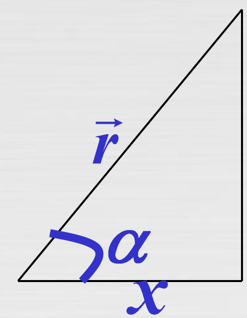
$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 表示向量 $\vec{r}$ 的方向，称为其**方向余弦**.



$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{r}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{r}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{r}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

由任一向量r的方向余弦所组成的向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是**单位向量**

例3. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角和单位向量.

解: $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2, 3-2, 0-\sqrt{2})$

$$=(-1, 1, -\sqrt{2})$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

$$e_{M_1M_2}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

例4. 从点$A(2,-1,7)$沿向量$a=8i+9j-12k$的方向取线段AB使$|\overrightarrow{AB}|=34$,求点B的坐标.

解: 设点B的坐标为(x,y,z), 则

$\overrightarrow{AB}=(x-2)i+(y+1)j+(z-7)k$,按题意可知

$\overrightarrow{AB}$ 上的单位向量与a上的单位向量相等,

即 $e_{AB}=e_a$

而 $|\overrightarrow{AB}|=34,\quad |a|=\sqrt{8^2+9^2+(-12)^2}=17$

所以$$e_{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{x-2}{34}i+\frac{y+1}{34}j+\frac{z-7}{34}k$$

$$e_a=\frac{a}{|a|}=\frac{8}{17}i+\frac{9}{17}j+\frac{12}{17}k$$

比较以上两式，得

$$\frac{x-2}{34}=\frac{8}{17}$$

$$\frac{y+1}{34}=\frac{9}{17}$$

$$\frac{z-7}{34}=-\frac{12}{17}$$

解得 $x=18, y=17, z=-17$

所以，设点B的坐标为(18,17,-17),

4^0. 用坐标进行向量的运算

设：$\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$,

则 $\vec{a}+\vec{b}=(a_x i+a_y j+a_z k)+(b_x i+b_y j+b_z k)$

$$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$$

$$=\{a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}$$

$$=\{a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z\}$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}.$$

$$=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

例5. $a = 2i - j + 2k, b = 3i + 4j - 5k$, 求$3a-b$方向的单位向量

解: 因为 $c = 3a - b = 3(2i - j + 2k) - (3i + 4j - 5k)$

$$= 3i - 7j + 11k$$

于是 $|c| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + (11)^2} = \sqrt{179}$

所以 $e_c = \dfrac{c}{|c|} = \dfrac{3a - b}{|3a - b|} = \dfrac{1}{\sqrt{179}}(3i - 7j + 11k)$

例6. 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, 求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$, 在$x$ 轴上的投影及在y轴上的分向量.

解: $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k},$$

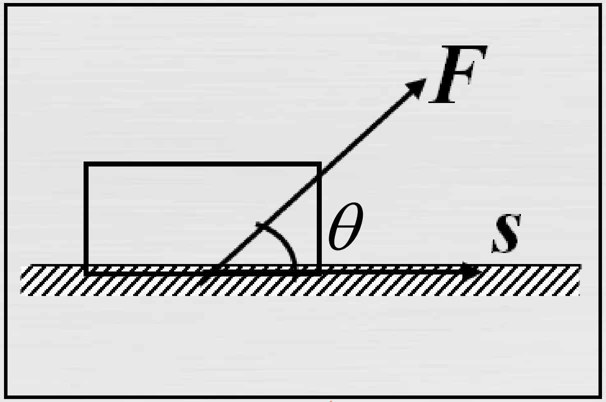
$\therefore$ 在x轴上的投影为$a_x=13$,

在y轴上的分向量为$7\vec{j}$.

三、 向量的数量积与向量积

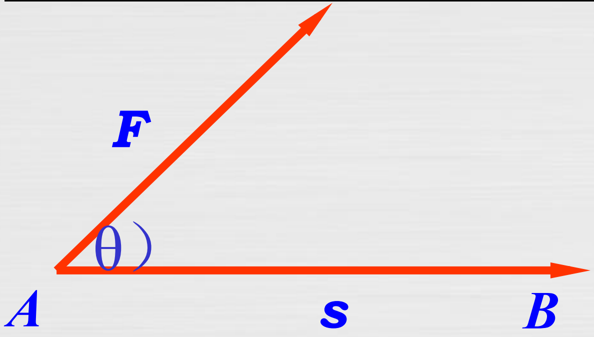
1. 两向量的数量积

例如: 设力$\boldsymbol{F}$ 作用于某物体上, 物体有一段位移$\boldsymbol{S}$, 求功的表示式.



解: 由物理知, 与位移平行的分力作功, 与位移垂直的分力不作功. 于是

$$W=|\boldsymbol{F}|\cos\theta \cdot |\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{S}|\cos\theta$$



(1) 定义4: 设有两个向量 a、b, 它们的夹角为θ,

将数值$|a||b|\cos\theta$称为a与b的数量积 (内积或 点积),

记作 $a\cdot b$. 即: $a\cdot b=|a|\,|b|\cos\theta$

因其中的$|b|\cos\theta$是向量b在向量a的方向上的投影,

故 $a\cdot b=|b|Prj_b a$

同样 $a\cdot b=|a|Prj_a b$

(2). 数量积的运算性质：

(1) 交换律　$a \cdot b = b \cdot a$

(2) 分配律　$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(3) 数量积满足如下结合律:

$(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda (a \cdot b)$,　λ为实数

(4) $a \cdot a \geq 0$，　且$a \cdot a = 0$ $\Longleftrightarrow$ $a = 0$

由数量积的定义，容易得出下面的结论：

(1)　$a \cdot a = |a|^2$

(2) 两个非零向量a, b 垂直, $\Longleftrightarrow$ $a \cdot b = 0$

(3). 数量积的坐标表示式

因为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 互相垂直, 所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, 则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\
&= a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\
&\quad +a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\
&= a_x b_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_x b_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_x b_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} \\
&\quad +a_y b_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_y b_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_y b_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} \\
&\quad +a_z b_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_z b_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_z b_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} \\
&= a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z
\end{aligned}
$$

得公式: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \qquad (1)$

即两向量的数量积等于它们同名坐标的乘积之和.

推论: 两个非零向量

$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$垂直

$$\Longleftrightarrow \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

(4). 数量积在几何中的应用

设 $a=(a_x, a_y, a_z)$, $b=(b_x, b_y, b_z)$,

(1) 求 a 在 b 上的投影.

已知: $Prj_b a = |a| \cdot \cos(\widehat{a, b})$

由 $a \cdot b = |b|\,|a| \cdot \cos(\widehat{a, b}) = |b| \cdot Prj_b a$ 得

$$Prj_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (2)$$

(2) 求两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角

由 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 知

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

$$= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (3)$$

例7. 已知 $\vec{a}=\{1,1,-4\}$, $\vec{b}=\{1,-2,2\}$

求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$;（2）$\vec{a}$与 $\vec{b}$ 的夹角;（3）$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

解: (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

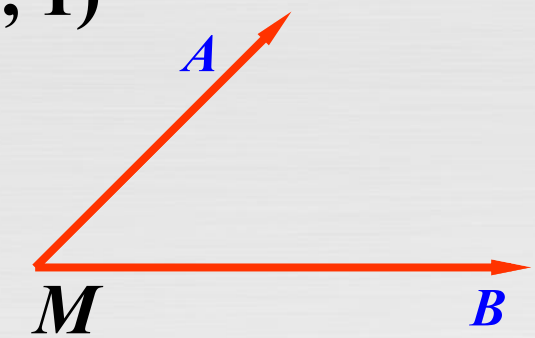
$$=\frac{-9}{3\sqrt{2}\cdot3}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}\qquad \therefore \mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$

例8. 已知三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$和$B(2, 1, 2)$, 求$\angle AMB$.

解: $\angle AMB$即为向量$\overrightarrow{MA}$与$\overrightarrow{MB}$的夹角.

由 $\overrightarrow{MA}=(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{MB}=(1, 0, 1)$



得 $$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}$$

$$=\frac{1\times1+1\times0+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

所以 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$

例9. 在 xoy平面上，求一单位向量与$P(-4,3,7)$垂直.

解: 设所求向量为(a,b,c), 因为它在xoy平面上,所以$c=0$,
又$(a,b,0)$与$P(-4,3,7)$垂直. 且是单位向量，故有

$$-4a+3b=0,\qquad a^2+b^2=1$$

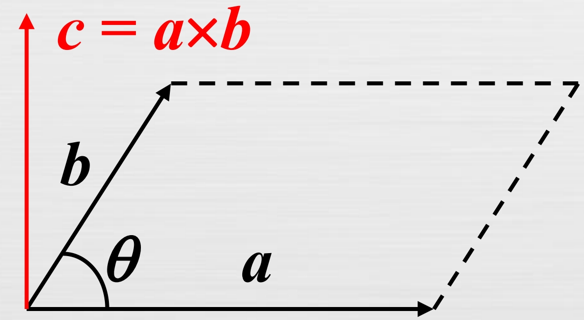
由此求得 $a=\pm\dfrac{3}{5},\quad b=\pm\dfrac{4}{5}$

因此所求向量为 $\left(\pm\dfrac{3}{5},\pm\dfrac{4}{5},0\right)$

2.两向量的向量积

(1)定义2 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,

夹角为θ, 作一个向量$\boldsymbol{c}$, 使得



(1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$

即等于以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

(2) $\boldsymbol{c}$ 与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所在的平面垂直, (即 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$且$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$).

$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.

则将向量$\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积, 记作: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

即: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(2) 向量积的性质 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ （向量积不满足交换律）；

(2) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$

(3) $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, λ为实数

由向量积的定义，容易得出下面的结论：

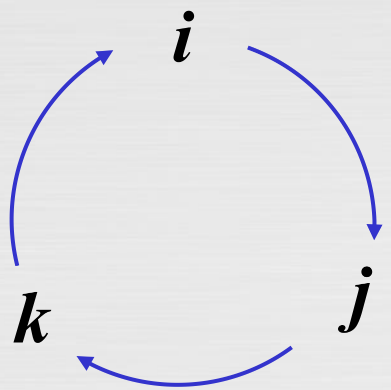
(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

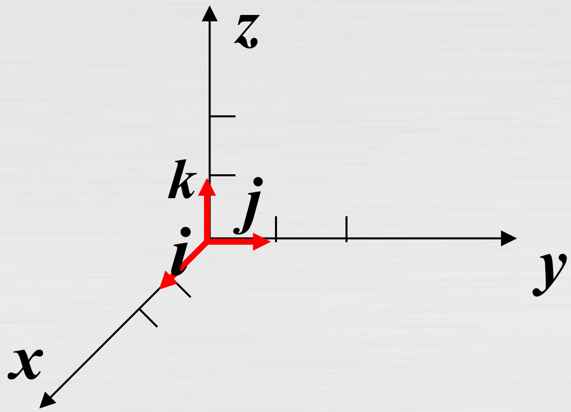
(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 平行 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

例如: $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$

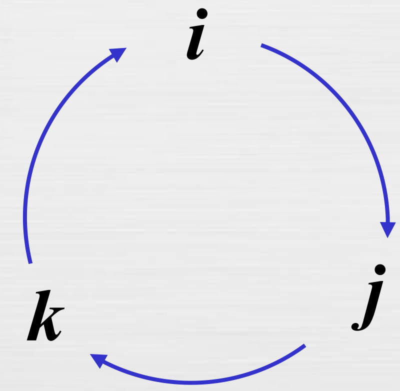
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ $\quad$ $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$ $\quad$ $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$ $\quad$ $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$ $\quad$ $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$





(3) 向量积的坐标表示式



设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ $\quad \boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$
$$+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$=a_x b_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_x b_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_x b_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})$$
$$+a_y b_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_y b_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_y b_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})$$
$$+a_z b_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_z b_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_z b_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})$$

$$=a_x b_y\boldsymbol{k}+a_x b_z(-\boldsymbol{j})+a_y b_x(-\boldsymbol{k})+a_y b_z\boldsymbol{i}$$
$$+a_z b_x\boldsymbol{j}+a_z b_y(-\boldsymbol{i})$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\boldsymbol{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

因此

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)\, i + (a_z b_x - a_x b_z)\, j + (a_x b_y - a_y b_x)\, k$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(4)向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}k$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

例10. 设 $a=2i+j-k,\quad b=i-j+2k$ 计算 $a\times b$

解: $a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$=\left[1\times 2-(-1)^2\right]i+\left[(-1)\times 1-2\times 2\right]j+\left[2\times(-1)-1\times 1\right]k$$

$$=i-5j-3k$$

例11. 求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$和$\boldsymbol{b}=(4,5,3)$的向量$\boldsymbol{c}$.

解: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$

而 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

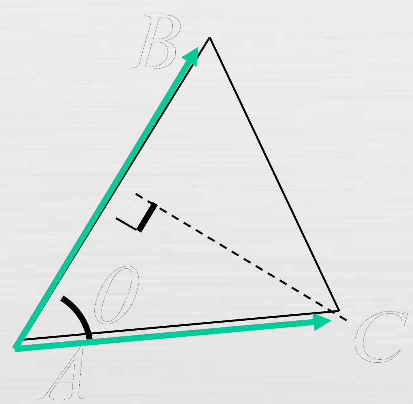
取 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$.

显然, 对于任意 $\lambda\neq 0\in R$, $\lambda\boldsymbol{c}=(\lambda,-2\lambda,2\lambda)$

也与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$垂直.

例12. 已知三点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积

解: 如图所示



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(4,-6,2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

例13. 已知 $a(2,1,1), b(1,-1,1)$, 求与a和b都垂直的单位向量.

解: 设 $c = a \times b$, 则c同时垂直于a和b

于是，c上的单位向量是所求的单位向量

因为 $c = a \times b = 2i - j - 3k$

$$|c| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

所以 $e_c = \frac{c}{|c|} = \left|\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right|$

$$-e_c = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

都是所求的单位向量.

四、小结

1. 向量的概念

向量的概念（注意与标量的区别）

向量的加减法（平行四边形法则）

向量与数的乘法（注意数乘后的方向）

向量在轴上的投影与投影定理.

向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标.

（注意分向量与向量的坐标的区别）

向量的模与方向余弦的坐标表示式.

2. 向量运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ $\quad$ $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 则

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

3. 向量关系

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \rightleftarrows \dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$

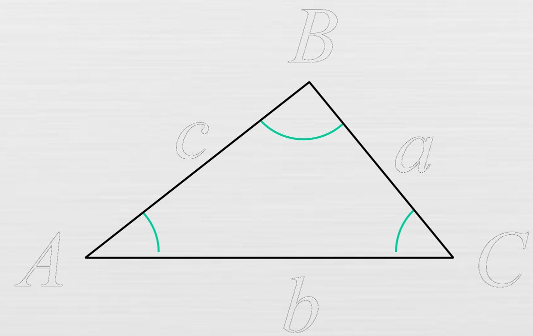
$\vec{a}\perp\vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \rightleftarrows a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$

备用题

1. 用向量方法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

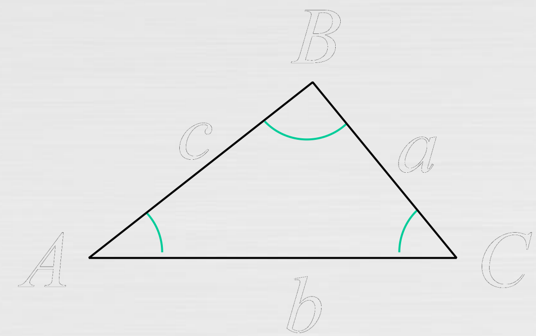
证: 由三角形面积公式



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}$$

因 $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=b\cdot c\cdot\sin A$

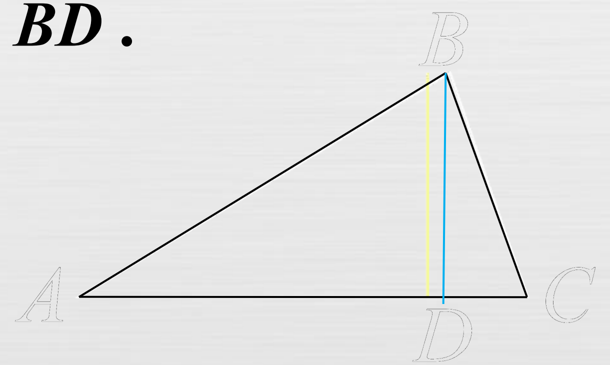


$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=c\cdot a\cdot\sin B$

$\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}=a\cdot b\cdot\sin C$

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

2. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中， 求 AC 边上的高 BD .



解： $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}=1$$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\ S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$

故有 $1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot|BD|\quad \therefore |BD|=\frac{2}{5}$

3. 求在 xoy 坐标面上与向量 $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量.

解: 设所求的向量为 $\boldsymbol{b}=\{x,y,z\}$. 因为它在 xy 坐标面上, 所以 $z=0$. 又因为 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量且与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,

所以 $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 即有

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ -4x+3y+7z=0. \end{cases}$$

解之得 $x=\pm\frac{3}{5}, y=\pm\frac{4}{5}, z=0$

故所求向量 $\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$.

4. 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 2$，它与 x轴和y轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1的坐标为(1,0,3)，求P_2的坐标.

解: 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x,y,z),

$$\cos\alpha=\frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow x=2,$$

$$\cos\beta=\frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}\Rightarrow\frac{y-0}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow y=\sqrt{2},$$

$$\cos\gamma=\frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}\Rightarrow\frac{z-3}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad\Rightarrow z=4,\ z=2,$$

P_2的坐标为 $(2,\sqrt{2},4)$, $(2,\sqrt{2},2)$.

提高题

1. 已知 $\vec{a}=\vec{i}, \vec{b}=\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

求一单位向量 $\vec{n}^0$, 使 $\vec{n}^0 \perp \vec{c}$, 且 $\vec{n}^0, \vec{a}, \vec{b}$ 共面.

2. (1) 设$\vec{a}$是非零向量，计算极限；

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}-x\vec{b}|}{x}$$

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，且 $|\vec{b}|=1$，$(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$$

3. 已知向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，

证明$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

4. 设$\vec{a} + 3\vec{b} \perp 7\vec{a} - 5\vec{b}$，$\vec{a} - 4\vec{b} \perp 7\vec{a} - 2\vec{b}$，试求$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

5. 设$\boldsymbol{a}=(2, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}=(1, 1, z)$, 问z为何值时$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$最小？

并求出此最小值.

提高题解答

1. 已知 $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

求一单位向量 $\vec{n}^0$, 使 $\vec{n}^0\perp\vec{c}$, 且 $\vec{n}^0,\vec{a},\vec{b}$ 共面.

解: 设 $\vec{n}^0=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, 由题设条件得

$$\begin{cases} |\vec{n}^0|=1 \\ \vec{n}^0\perp\vec{c} \\ \vec{n}^0\perp\vec{a}\times\vec{b} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2y+z$$

解得 $\vec{n}^0=\pm(\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k})$.

2. (1) 设$\vec{a}$是非零向量，计算极限；

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}-x\vec{b}|}{x}$$

解：（1）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}-x\vec{b}|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}-x\vec{b}|^2}{x\left(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}-x\vec{b}|\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\vec{a}\cdot\vec{b}}{x\cdot 2|\vec{a}|}=2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}+x\vec{b}|^2=(\vec{a}+x\vec{b})\cdot(\vec{a}+x\vec{b})$$

$$=a\cdot a+xa\cdot b+xb\cdot a++x^2b\cdot b$$

$$=|a|^2+2xa\cdot b+x^2|b|^2$$

$$|\vec{a}-x\vec{b}|^2=|a|^2-2xa\cdot b+x^2|b|^2$$

（2）$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，且$|\vec{b}|=1$，$(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$,求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$$

解:（2）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x\left(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x\cdot 2|\vec{a}|}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a\cdot b+x|\vec{b}|^2}{2|\vec{a}|}=\lim_{x\to 0}\frac{2a\cdot b}{2|\vec{a}|}$$

$$=|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 已知向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，

证明$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

解：$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 [1 - \cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})]$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

4. 设$\vec{a}+3\vec{b}\perp 7\vec{a}-5\vec{b}$，$\vec{a}-4\vec{b}\perp 7\vec{a}-2\vec{b}$，试求$(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$

解: 由题义 $\begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0\\(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0\end{cases}$

即 $\begin{cases}7|\vec{a}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0 & (1)\\7|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0 & (2)\end{cases}$

设$(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\theta$，　(1)−(2) 得

$$46|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-23|\vec{b}|^2=0 \quad \text{或}\ 2|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{b}|$$

又由 (1)×15+(2)×8 得 $\quad |6||\vec{a}|^2-|6||\vec{b}|^2=0$

所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

由此 $2\cos\theta=1 \quad \theta=\dfrac{\pi}{3}$

5. 设$\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,z)$, 问z为何值时$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$最小？并求出此最小值.

解： $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$

因为当$0<(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})<\dfrac{\pi}{2}$时, $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 为单调减函数.

求$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$的最小值,也就是求$f(z)=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$的最大值.

令, $f'(z)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}}=0$ 得$z=-4$.

当$z=-4$时, $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})_{\min}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

向量及其运算

习题

一、重要知识点

1、向量: 既有大小又有方向的量，

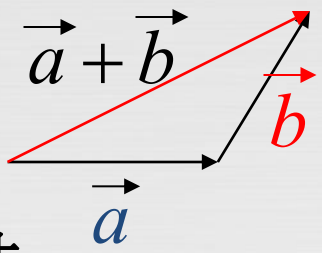
(1)向量的几何表示法

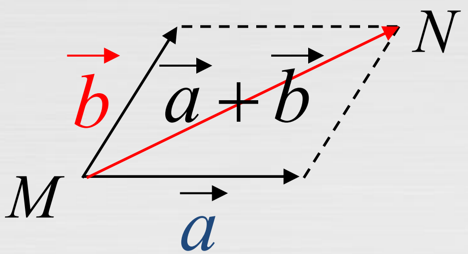
(2)向量的坐标表示法

2、向量的线性运算

(1)向量的几何运算法

1)向量的加法、减法、





平行四边形法、三角形法。

2)向量与数的乘法

向量 $\vec{a}$ 与数λ的乘积是一个向量

(2) 向量的坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$ 则

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

3. 向量关系

$$\vec{a}/\!/\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Longleftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

4、数量积在几何中的应用

(1) 求 *a* 在 *b* 上的投影.

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

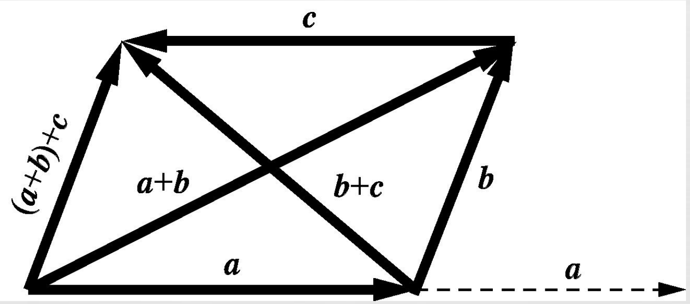
(2) 求两向量 *a*, *b* 的夹角

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

二、习题解答7—2

1. 验证: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

证明： 利用三角形法则得证.见图



2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$

解： $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$$=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$$

$$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$$

3.把ΔABC的BC边五等分，设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4，再把各分点与A连接，试以$\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}, \overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$ 表示向量

$\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3\mathrm{A}}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$

解：

$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_1}=-\boldsymbol{c}-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_2}=-\boldsymbol{c}-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_3}=-\boldsymbol{c}-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_4}=-\boldsymbol{c}-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}.$$

4. 设向量$\overrightarrow{OM}$的模是4，它与投影轴的夹角是60°求这向量在该轴上的投影.

解: 设M的投影为M'，则

$$\Pr j_u \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

5. 一向量的终点为点$B(2,-1,7)$,它在三坐标轴上的投影依次是4,－4和7，求这向量的起点A的坐标.

解: 设此向量的起点A的坐标$A(x, y, z)$，则

$$\overrightarrow{AB} = \{4, -4, 7\} = \{2-x, -1-y, 7-z\}$$

解得 $x=-2, y=3, z=0$

故A的坐标为 $A(-2, 3, 0)$.

6. 一向量的起点是 $P_1(4,0,5)$，终点是 $P_2(7,1,3)$，试求:

(1) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在各坐标轴上的投影；

(2) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；

(3) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；

(4) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向的单位向量.

解:(1) $a_x = \mathrm{Prj}_x \overrightarrow{P_1P_2} = 3,$

$a_y = \mathrm{Prj}_y \overrightarrow{P_1P_2} = 1,$

$a_z = \mathrm{Prj}_z \overrightarrow{P_1P_2} = -2.$

(2) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(7-4)^2+(1-0)^2+(3-5)^2} = \sqrt{14}$

(3) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

$\cos\beta = \dfrac{a_y}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

$\cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{-2}{\sqrt{14}}$

(4) $\boldsymbol{e}_0 = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \{\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{-2}{\sqrt{14}}\}$

$$= \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$$

7. 三个力 $\mathbf{F}_1=(1,2,3),\mathbf{F}_2(-2,3,-4),\mathbf{F}_3(3,-4,5)$ 同时作用于一点，

求合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向余弦.

解： $\boldsymbol{R}$=（1-2+3，2+3-4，3-4+5）=（2，1，4）

$$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

8. 求出向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的模，

并分别用单位向量$\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b,\mathbf{e}_c$来表达向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

解：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=3$$

$$\boldsymbol{a}=\sqrt{3}\boldsymbol{e}_a,\quad \boldsymbol{b}=\sqrt{38}\boldsymbol{e}_b,\quad \boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_c.$$

9. 设$m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k, p=5i+j-4k$求向量$a=4m+3n-p$在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分向量.

解：$a=4(3i+5j+8k)+3(2i-4j-7k)-(5i+j-4k)$

$=13i+7j+15k$

在x轴上的投影$a_x=13$,

在y轴上分向量为$7j$.

10. 已知单位向量**a**与*x*轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与其在*xoy*平面上的投影向量的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. 试求向量**a**.

解: 设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 则有

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=a_x\,(|\vec{a}|=1,|\vec{i}|=1)$$

求得 $a_x=\frac{1}{2}$

设 $\vec{a}$ 在*xoy*面上的投影向量为 $\vec{b}$，则有 $\vec{b}=\{a_x,a_y,0\}$

则 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{ax^2+ay^2}{\sqrt{ax^2+ay^2}}$

则 $a_y^2=\frac{1}{4}$ 求得 $a_y=\pm\frac{1}{2}$

$|\vec{a}|=1$, 则 $a_x^2+a_y^2+a_z^2=1$

从而求得 $\vec{a}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ 或 $\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

11. 已知两点 $M_1(2,5,-3), M_2(3,-2,5)$ 点 M 在线段 M_1, M_2 上,且 $\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$ 求向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

解: 设向径 $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-2, y-5, z+3\}$$

$$\overrightarrow{MM_2}=\{3-x, -2-y, 5-z\}$$

因为, $\overrightarrow{M_1M}=3\overrightarrow{MM_2}$

所以, $\begin{cases} x-2=3(3-x) \\ y-5=3(-2-y) \\ z+3=3(5-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4} \\ z=3 \end{cases}$

故 $\overrightarrow{OM}=\{\dfrac{11}{4}, -\dfrac{1}{4}, 3\}$

12. 已知点P到点$A(0,0,12)$的距离是7，$\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦是 $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}$. 求点$P$的坐标.

解： 设P的坐标为（x, y, z），$|\overrightarrow{PA}|^2 = x^2 + y^2 + (z-12)^2 = 49$

得 $x^2 + y^2 + z^2 = -95 + 24z$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{6}{7} \Rightarrow z_1 = 6,\ z_2 = \frac{570}{49}$$

又 $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{7} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = \frac{190}{49}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{3}{7} \Rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = \frac{285}{49}$$

故点P的坐标为P（2，3，6）或 $P(\frac{190}{49},\frac{285}{49},\frac{570}{49})$

13. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$，计算:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$

解(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\varphi\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}\times 3\times 4$$

$$=-\frac{1}{2}\times 3\times 4=-6$$

解(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$$=3|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4|\boldsymbol{b}|^2$$

$$=3\times 3^2+4\times(-6)-4\times 16$$

$$=-61.$$

14. 已知$a=(4,-2,4)$,$b=(6,-3,2)$计算:

(1) $a\cdot b$　　(2) $(3a-3b)\cdot(a+b)$　　(3) $|a-b|^2$

解(1) $a\cdot b=4\times6+(-2)\times(-3)+4\times2=38$

解(2) $(2a-3b)\cdot(a+b)=2a\cdot a+2a\cdot b-3a\cdot b-3b\cdot b$

$$=2|a|^2-a\cdot b-3|b|^2$$

$$=2\times[4^2+(-2)^2+4^2]-38-3[6^2+(-3)^2+2^2]$$

$$=2\times36-38-3\times49=-113$$

解(3) $|a-b|^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a-2a\cdot b+b\cdot b$

$$=|a|^2-2a\cdot b+|b|^2$$

$$=36-2\times38+49=9$$

15. 已知$a=3i+2j-k, b=i-j+2k$,求:

(1) $a\times b$; (2) $2a\times 7b$; (3) $7b\times 2a$;

(4) $a\times a$;

解(1) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$$

解(2) $2\boldsymbol{a}\times 7\boldsymbol{b}=14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=42\boldsymbol{i}-98\boldsymbol{j}-70\boldsymbol{k}$

解(3) $7\boldsymbol{b}\times 2\boldsymbol{a}=14(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-42\boldsymbol{i}+98\boldsymbol{j}+70\boldsymbol{k}$

解(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$

16 已知向量 $\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互相垂直，且$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$，计算:

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$　　(2) $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$

解(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$=|-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$

$=2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=24$

解(2) $|(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=|3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$

$=|7(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})|$

$=7\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{2}=84$