

# 周期性外力驱动的混沌摆

程敏熙, 曾碧芬, 刘惠娜, 黄 铭

(华南师范大学 物理电信工程学院, 广东 广州 510006)

**摘 要:**为了简单直观地呈现混沌现象, 研制了受周期驱动力驱动的混沌摆实验系统. 实验系统由力学机构、采集机构和数据处理分析仪组成. 力学机构是受周期外力驱动的复摆; 采集机构采用无触点角度传感器, 通过串口通信实时将数据传输给计算机; 数据处理分析仪用虚拟仪器平台 LabVIEW 软件编程实现. 该系统可实时显示反映混沌基本特征的角度时序图、角速度时序图和相图.

**关键词:**混沌摆; 周期性外力驱动; LabVIEW

**中图分类号:** O415.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1005-4642(2009)01-0007-07

## 1 引 言

不少学者认为, 20 世纪物理学界经历了 3 次大革命: 相对论、量子力学和混沌学. 混沌理论是第三次、也是最深刻的一次. 与前 2 次相似, 混沌也同样冲破了经典力学的“教规”. 相对论消除了关于绝对空间和绝对时间的幻象; 量子力学消除了关于可控测量过程的梦; 而混沌学则冲破了决定论式可预测性的藩篱<sup>[1]</sup>. 这第三次革命的特点是, 它涉及的是我们周围看得见、摸得着的现象, 是与人类本身的尺度大小差不多的对象所活动的过程, 这正是混沌理论的研究和应用得到广泛、迅速发展的原因<sup>[2]</sup>. 近年来, 混沌学(chaology)迅速在各个学科领域中发展起来, 如物理学、数学、化学、生物学、经济学和社会学等. 但是, 由于混沌学的理论复杂、模型抽象, 而且模拟研究的居多, 所以一般情况下难以理解. 如果借助原理显浅、结构简单的实验装置来呈现混沌的特性, 可以使人们较好地理解和掌握混沌的知识. 本研究采用受周期性外力驱动的复摆, 成功地呈现了混沌的基本特征, 实验与理论模拟结果相符.

## 2 实验原理

电机驱动连接单摆的小车做往复运动, 设  $O$  为系统往复运动的中心, 以此点建立惯性坐标系

$O\text{-}XY$ . 小车是非惯性系, 选支架上的悬点  $O'$  为非惯性系  $O'\text{-}X'Y'$  的原点. 根据装置图建立如图 1 所示的坐标系. 以摆为研究对象, 取悬点  $O'$  为参考点, 根据质点对参考点的角动量定理, 可得摆锤在非惯性系中的动力学方程为

$$\frac{dL}{dt} = M_G + M_{f_1} + M_{F_R} + M_{F_N} + M_{f_2}. \quad (1)$$

其中:  $G$ ,  $f_1$  和  $F_R$  分别是摆锤所受重力、阻尼力和惯性力; 支持力  $F_N$  对转动力矩无贡献, 故  $M_{F_N} = 0$ ;  $f_2$  是轴与轴承间的摩擦力, 也对转动力矩没有贡献, 即  $M_{f_2} = 0$ . 式中  $L$  表示总角动量,  $M_G$ ,  $M_{f_1}$  和  $M_{F_R}$  分别为重力矩、阻尼力矩和惯性力矩.

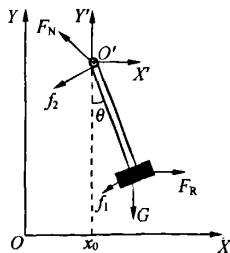


图 1 混沌摆坐标系

非惯性系坐标原点  $O'$  在惯性系  $O\text{-}XY$  中的运动规律为

$$x_{O'}(t) = x_0 + r_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2)$$

“第 5 届全国高等学校物理实验教学研讨会”论文

收稿日期: 2008-08-06; 修改日期: 2008-10-25

基金项目: 广东响石科研基金(No. 2007012); 广东省工业攻关项目(No. C60109, 2006B2901020)

作者简介: 程敏熙(1962-), 男, 广东四会人, 华南师范大学物理电信工程学院副教授, 博士, 从事为光电技术与系统、物理实验设计与研究.

$$\ddot{x}_O'(t) = -r_0 \omega_d^2 \cos(\omega_d t). \quad (3)$$

所以, 惯性力为

$$F_R = -m \ddot{x}_O'(t) = m r_0 \omega_d^2 \cos(\omega_d t). \quad (4)$$

其中  $r_0$  为电机曲柄的长度,  $\omega_d$  为电机的转动角频率, 即系统的周期驱动频率,  $\ddot{x}_O'(t)$  是非惯性系相对于惯性系的加速度. 于是(1)式可写成:

$$m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -m g l \sin \theta - \gamma l^2 \frac{d\theta}{dt} + m l r_0 \omega_d^2 \cos(\omega_d t) \cos \theta, \quad (5)$$

其中  $l$  为摆长,  $\gamma$  为阻尼系数. 将方程(5)无量纲化, 令固有频率  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , 并用  $\omega_0^2$  去除(5)式的每一项, 令  $\beta = \frac{\gamma}{2m\omega_0}$ ,  $F_0 = \frac{r_0 \omega_d^2}{l \omega_0^2}$ ,  $\Omega = \frac{\omega_d}{\omega_0}$ ,  $\tau = \omega_0 t$ , 于是(5)式可化为

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 2\beta \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta = F_0 \cos \theta \cos(\Omega \tau). \quad (6)$$

其中  $\beta$  为无量纲化阻尼因数,  $F_0$  为无量纲化的驱动力参数,  $\tau$  为时间因子. (6)式反映了单摆在非惯性系  $O'-X'Y'$  中的运动所遵循的动力学规律, 而单摆在惯性系  $O-XY$  中的位置由下式确定:

$$\begin{cases} X(t) = X_O'(t) + l \sin[\theta(t)], \\ Y(t) = l \cos[\theta(t)]. \end{cases} \quad (7)$$

因此, 通过研究单摆在非惯性系中的运动规律可以得到它在惯性系中的运动规律.

(6)式右边显含时间因子  $\tau$ , 这是一个非自治的非线性微分方程. 如果引进变量  $\varphi$ , 令  $\varphi = \Omega \tau$ , 则可将(6)式化为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -2\beta \omega - \sin \theta + F_0 \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

方程组(8)中每个式子的右边都不显含时间因子, 因此这是一个自治的动力学系统<sup>[3]</sup>. 而一阶自治微分方程要出现混沌, 必须具备2个条件<sup>[4]</sup>:

- 1) 方程右侧至少有1个非线性项;
- 2) 至少要有3个变量.

可见, 该系统具备了这2个基本条件, 可以出现混沌现象.

因为实际的系统是复摆, 所以将以上单摆模型换成复摆模型, 由以上推导易得出复摆的运动方程为

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -m g r_c \sin \theta - \gamma r_c^2 \frac{d\theta}{dt} +$$

$$m r_0 \omega_d^2 r_c \cos(\omega_d t) \cos \theta. \quad (9)$$

令

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g r_c}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad \beta = \frac{\gamma r_c^2}{2 \omega_0 I},$$

$$F_0 = \frac{m r_0 r_c \omega_d^2}{I \omega_0^2}, \quad \Omega = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t,$$

可得:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 2\beta \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta = F_0 \cos \theta \cos(\Omega \tau). \quad (10)$$

同样可以化成下面方程组:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -2\beta \omega - \sin \theta + F_0 \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

可见, 该复摆系统同样具备了出现混沌的2个基本条件, 只要系统的参数调节适当, 可以出现混沌现象.

### 3 实验系统的设计

实验系统主要由力学机构、采集机构和虚拟数据处理分析仪组成. 力学机构模型是受周期外力驱动的复摆; 采集机构采用无触点角度传感器, 通过串口通信将数据实时传输给计算机; 数据处理分析仪用虚拟仪器平台 LabVIEW 软件编程实现, 可实时显示最能反映混沌基本特征的角度时序图、角速度时序图和相图. 其基本框架如图2所示.

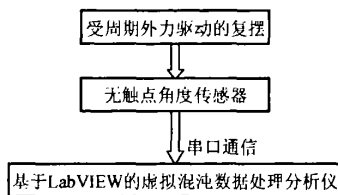


图2 实验系统的基本构成

#### 3.1 实验装置的力学结构

力学结构实物图如图3所示. 实验装置的力学机构是最主要的部分, 其底座有4个旋钮可调节装置的水平, 底座的质量较大, 保证小车运动时整个装置的稳定. 小车的4个脚上各有1对滚动轴承, 分别接触滑杆的上下表面, 利用轴承的滚动减少小车与滑杆之间的摩擦. 小车的一端用刚性曲柄连杆与变频电机连接, 通过电机的驱动, 使小

车在水平滑杆上沿固定轨道做直线往复运动。电机采用变频电机(0~24 V),通过调节电压可以控制驱动频率。驱动盘设计为在其直径上打孔,组合成不同的驱动幅度,使曲柄的长度改变范围为10~100 mm,每10 mm可改变1次。量角器可用于测量摆球的初始角度,由于该实验不需要精确测量初始角度值,所以量角器的分度值取5°。摆杆为长114.0 mm,直径为3.00 mm的细圆柱体,整条杆外表面为螺纹,用于固定摆球并连续改变摆的长度,设计成刚性摆,可实现摆球任意角度的摆动。将摆杆与角度传感器的中心轴连接,摆球的摆动带动传感器中心轴的转动,从而精确测量摆球的角度值,利用传感器和串口通信将角度值实时传输到计算机。电源采用可跟踪直流电源(0~30 V),分别给变频电机和传感器提供电压。整套实验装置的各个部件都设计成可拆卸,便于拆装、维修与改进。

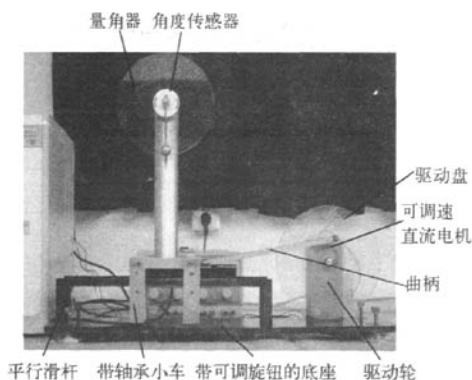


图3 实验装置实物图

### 3.2 数据采集机构

为了实时准确测量摆球的任意角度值(可超过360°)和中心轴几乎没有摩擦的2个条件,采用了北京天海科技发展有限公司的DWQT-BZ-232-360-Φ38-1无触点角度传感器进行数据采集。该传感器采用高性能集成磁敏感元件,利用磁信号感应非接触的特点,配合微处理器进行智能化信号处理,可编程选定测量区间为0°~360°和256圈,输出方式为RS232,ASCII码。将摆杆与传感器的中轴连接。由于摆球出现混沌时会有任意圈的摆动,所以将摆球的平衡位置对应的角度尽量取测量范围的中间值,将测量到的角度值减

去平衡位置对应的角度值即是摆球的角度值,由此方法可以实现数据如实对应摆球的摆角的大小及方向。

### 3.3 基于虚拟仪器的数据处理分析仪

传感器与计算机通信利用LabVIEW中的VISA库<sup>[5]</sup>(virtual instrument software architecture)实现。VISA提供了统一的I/O库,使用户可以用与接口无关的方式为各类仪器编程。本文采用串口通信,以下是LabVIEW串行通信底层程序设计主要的VISA节点:

1) VISA Configure Serial Port节点。用于初始化串口,设置串口的波特率、数据位、停止位、奇偶校验及流量控制等通信参数。

2) VISA Write节点。将命令发送到仪器中。端口 write buffer 用于输入命令。

3) VISA Read节点。从仪器缓存区读取数据。端口 byte count 用于指定独处数据的字节数,端口 read buffer 将数据以字符串形式送出。

4) VISA Close节点。关闭打开的VISA资源。

传感器通过RS-232与计算机相接,VISA Configure Serial Port节点中的VISA Resource Name 设为ASRL2: INSTR 或根据串口号设为COM1 或COM2。其他参数根据传感器的通信协议设为:传输速率为9 600 b/s,起始位1位,数据位8位,停止位1位,偶校验,结束符13。为了使传感器的测量范围是256圈,根据其协议在VISA Write节点中的端口 write buffer 设为十六进制字符1D。

整个程序主要由实验说明、接收数据、保存数据、数据处理、清空数据、角度值进行弧度制转换和计算角速度、计算系统等值摆长等参数模块组成。程序的后面板见图4,前面板见图5。

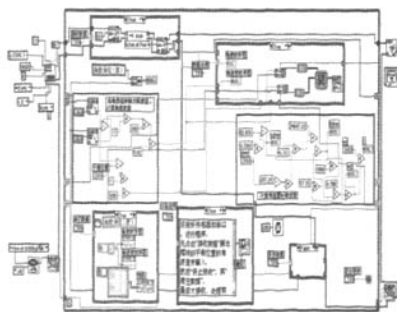


图4 程序的后面板

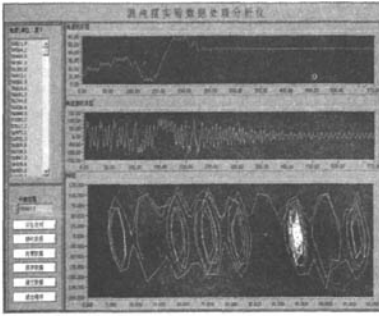


图 5 程序的前面板

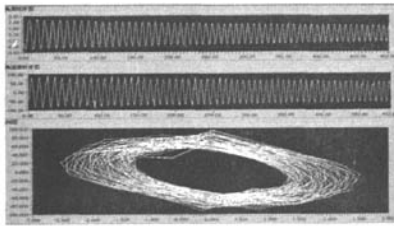
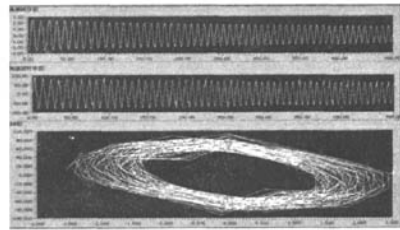
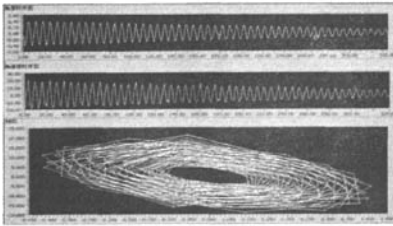
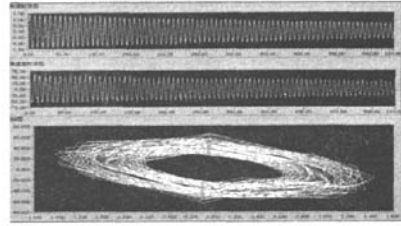
(a) 角度初始值  $30^\circ$ (b) 角度初始值  $90^\circ$ (c) 角度初始值  $170^\circ$ (d) 角度初始值  $171^\circ$ 

图 6 无驱动摆长 105.87 mm 不同角度初始值的实验结果

## 4 实验结果

### 4.1 复摆的无驱动有阻尼运动规律

在无驱动有阻尼的情况下,取等值摆长  $l_0 = 105.87 \text{ mm}$ ,改变摆角初始值,分别为  $30^\circ, 90^\circ, 170^\circ$ .为探究系统对初始值是否敏感,在  $\theta(0) = 170^\circ$ 时稍微改变角度初始值做实验进行比较.从图 6(a)和(b)可看出,在摆长一定时,摆角初始值较小时相图轨迹接近椭圆,摆角初始值逐渐增大,相图轨迹逐渐发生畸变.比较图 6(c)和(d)可知,当系统没有出现混沌时,系统对初始值不敏感.

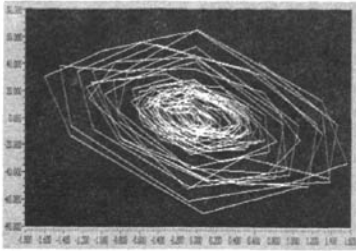
### 4.2 复摆的有驱动有阻尼运动规律

取摆长  $l_0 = 105.87 \text{ mm}$ 、曲柄长度  $r_0 = 7 \text{ cm}$ ,逐渐增大驱动电压  $U$ .从前面实验结果可知,当摆的角度初始值越大时系统的运动越趋于复杂,所以下实验数据给出的角度初始值都是系统刚好出现混沌现象时对应的角度值.从图 7(a)和(b)可知,在驱动电压较小,即驱动频率较小时,系统未出现混沌,摆的运动仍表现周期运动,此时系统对初始值不敏感.从图 7(c)可见,当驱动电压达到一定值(4.2 V)时,系统从周期运动逐渐出现混沌.比较图 7(c)和(d),发现当角度初始值

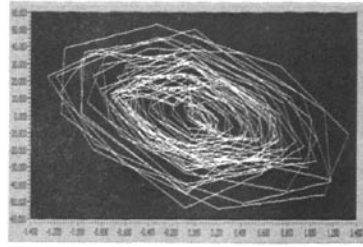
稍微改变时系统的运动情况却变化很大,图 7(c)和(d)完全不同.在一定范围内,驱动电压越大,驱动频率越大,系统越容易出现混沌,当电压为 4.6 V 时,角度初值为  $0^\circ$  都可以出现混沌了[图 7(e)].相图呈现的是混沌吸引子,吸引子由外向内绕若干圈转到中心附近后,将“随机”跳跃到另一环套上继续向内绕,再突然跳回原来的那个环套.对应于摆的实际运动,则是摆球时而做周期运动时而角度超过  $360^\circ$ ,甚至可以一直旋转多圈,而后又作周期运动.观察相图,尽管无法预料轨迹将在何时从一边跳到另一边,但是相轨道总

不会冒出环套的边界,也绝不会自相重复,称之为“奇异吸引子”.之所以称其为“吸引子”,是因为系统在状态空间中的相轨道最终都向它靠拢;之所以称“奇异”,是因为该吸引子不是 1 个点,而是

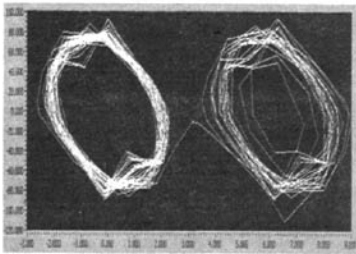
具有复杂的结构,其总体形状具有一定的特征,意味着一种新的有序<sup>[6]</sup>.由此可见混沌现象看似无序,却有一定的规律,因此我国混沌学最早研究者郝柏林指出混沌是一种非周期性的有序<sup>[3]</sup>.



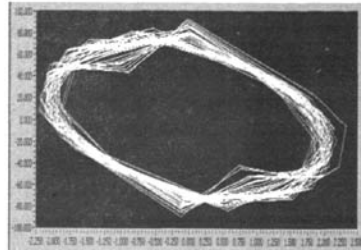
(a) $U=3.8\text{ V},\theta(0)=170^\circ$



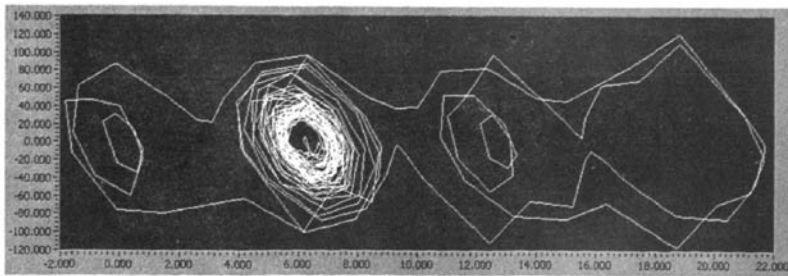
(b) $U=3.8\text{ V},\theta(0)\approx 170^\circ$



(c) $U=4.2\text{ V},\theta(0)=160^\circ$



(d) $U=4.2\text{ V},\theta(0)\approx 160^\circ$



(e) $U=4.6\text{ V},\theta(0)=0^\circ$

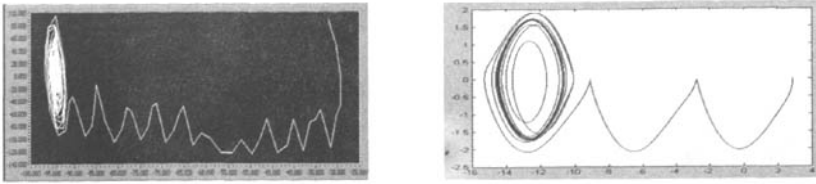
图 7 逐渐增大驱动电压的实验结果

通过这部分内容的实验,系统已展现了当参数适当改变时,复摆可从周期运动逐渐走向混沌.当系统出现混沌时表现出对初始值敏感和奇异性等基本特征.

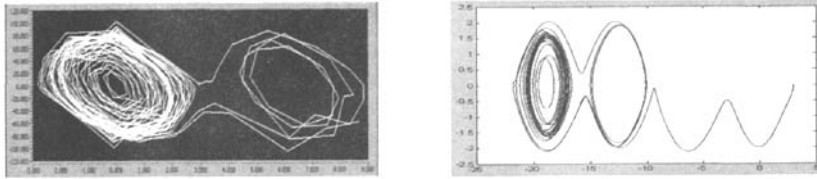
### 4.3 实验数据与理论值的比较

为验证本系统的实验结果与理论是否相符合,采用 Matlab 对混沌摆的动力学方程进行编

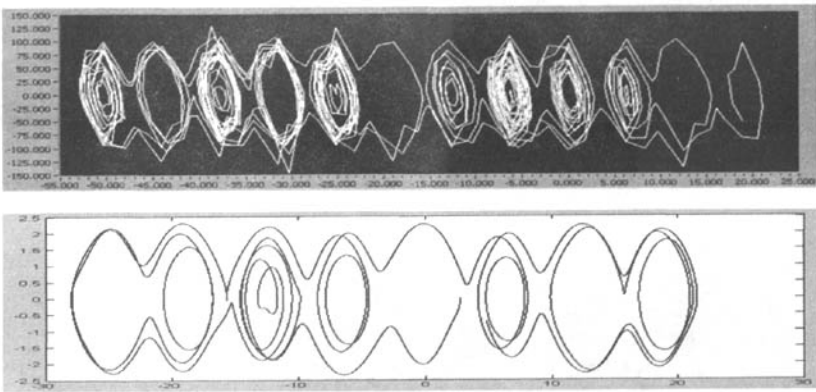
程,根据实验系统的实际参数代入程序进行计算,得到理论模拟图像并与实验结果进行对比,如图 8 所示.背景黑色的为实验数据图像,背景白色的为理论模拟图像.从这一系列实验数据与理论模拟的时序图和相图可知,本实验系统的实验结果与理论基本符合.实验图中的曲线不够圆滑是由于传感器采样率还不够高所致.



(a) 驱动电压  $U=4.0\text{ V}$ , 曲柄长度  $r_0=8\text{ cm}$ , 摆长  $l_0=87.06\text{ mm}$ ,  $\theta(0)=165^\circ$



(b) 驱动电压  $U=4.0\text{ V}$ , 曲柄长度  $r_0=6\text{ cm}$ , 摆长  $l_0=105.89\text{ mm}$ ,  $\theta(0)=170^\circ$



(c) 驱动电压  $U=4.6\text{ V}$ , 曲柄长度  $r_0=5\text{ cm}$ , 摆长  $l_0=96.41\text{ mm}$ ,  $\theta(0)=160^\circ$

图 8 理论模型与实验结果对比

## 5 结 论

设计了受水平方向上周期性外力驱动的混沌摆实验系统, 该系统的驱动曲柄长度改变范围为  $10\sim 100\text{ mm}$ , 驱动频率可调。采用无触点角度传感器采集摆球的摆动角度(可超过  $360^\circ$ ), 通过 RS232 串口通信实时将数据(ASCII 码)传输给计算机; 用虚拟仪器平台 LabVIEW 软件编程实现数据处理分析仪, 可实时显示反映混沌基本特征的角度时序图、角速度时序图和相图; 通过 Matlab 对复摆的动力学方程进行编程, 根据实验系统的实际参数代入程序进行计算, 得到理论模拟图

像并与实验结果进行对比, 实验结果与理论模拟结果相符合。

## 参考文献:

- [1] 杨家富, 杨家宽. 试论混沌理论对现代科学技术的影响和作用[J]. 南京林业大学学报(人文社会科学版), 2003, (9): 20-26.
- [2] 黄润生. 混沌及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2001.
- [3] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1993.
- [4] 陈士华, 陆君安. 混沌动力学初步[M]. 武汉: 武汉

- 水力电力学院出版社,1998.
- [5] 刘君华. 基于 LabVIEW 的虚拟仪器设计[M]. 北京:电子工业出版社,2003.
- [6] 常树人,吕可诚. 浅说“混沌”[J]. 大学物理,1999,18(9):32-35;1999,18(10):39-42,48;1999,18(11):36-38.
- [7] 李曙华. 从系统论到混沌学[M]. 桂林:广西师范大学出版社,2002.
- [8] 龙运佳. 混沌振动研究方法与实践[M]. 北京:清华大学出版社,1996.
- [9] 侯国屏,王坤,叶齐鑫. LabVIEW7.1 编程与虚拟仪器设计[M]. 北京:清华大学出版社,2005.
- [10] 曾碧芬,程敏熙. 虚拟混沌信号发生与辨识仪的设计[J]. 实验技术与管理,2008,25(4):48-51.
- [11] 陈立宏,乔红华,彭建华,等. 外周期力驱动的倒摆混沌运动演示仪[J]. 物理实验,2005,25(12):34-37.

## Chaotic pendulum driven by periodic external force

CHENG Min-xi, ZENG Bi-fen, LIU Hui-na, HUANG Ming

(School of Physics and Telecommunication Engineering,  
South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** In order to intuitionistically show phenomena of chaos, an experiment system of chaotic pendulum driven by periodic external force is designed. There are three parts, namely mechanical section, acquirement section and analyzer, in the system. The mechanical section is a pendulum driven by periodic external force; data are acquired by breakerless angle sensor and transferred to computer through serial communication; the analyzer is a virtual instrument written by LabVIEW. The angle-time curve, angular velocity-time curve and phase curve can be displayed in real time.

**Key words:** chaotic pendulum; external periodic force; LabVIEW

[责任编辑:任德香]

(上接第 6 页)

## Experiment of Belousov-Zhabotinsky oscillating reaction

SUN Ping, ZHENG Jia-yu, ZHOU Hua-xi, SUN Jin-fang, YANG Jun

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

**Abstract:** An innovative experiment named B-Z oscillating reaction is introduced. According to Oregonator's model based on FKN mechanism, dynamics analyses on the system are carried out and nonlinear behaviors are obtained. According to the two-dimensional Tyson's model the target wave and spiral wave are simulated with difference method. In experiments, the concentration of vitamin C is determined in closed system. The nonlinear behaviors are studied in a simple open system. Moreover, in a close system, a spiral pair is formed by cutting out a target wave. The single spiral wave and broken spiral wave are also observed.

**Key words:** Belousov-Zhabotinsky oscillating reaction; numerical simulation; chaos; pattern; vitamin C

[责任编辑:任德香]