第四章

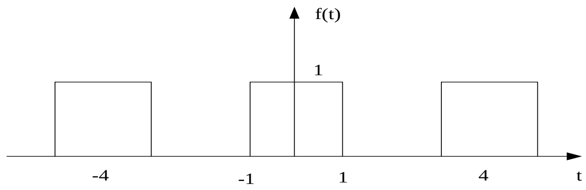
4.6 求下列周期信号的基波角频率Ω和周期 T

（1）e^{j100t}　　　　　　　　　（3）cos(2t)+sin(4t)

（1）由于 ej100t=cos(100t)+jsin(100t)，所以周期 T=$\frac{2\pi}{100}s=\frac{\pi}{50}s$,基波角频率Ω=100rad/s

（3）cos(2t)+sin(4t)的周期为 cos(2t)和 sin(4t)的周期最小公倍数，因此 T=πs，Ω=2rad/s

4.7 用直接计算傅里叶系数的方法，求下图所示周期函数的傅里叶系数。

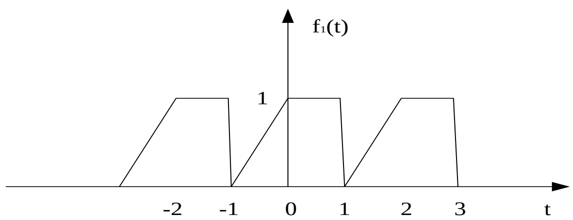


如图所示周期信号的周期为 4，其基波角频率Ω=2π/T=π/2

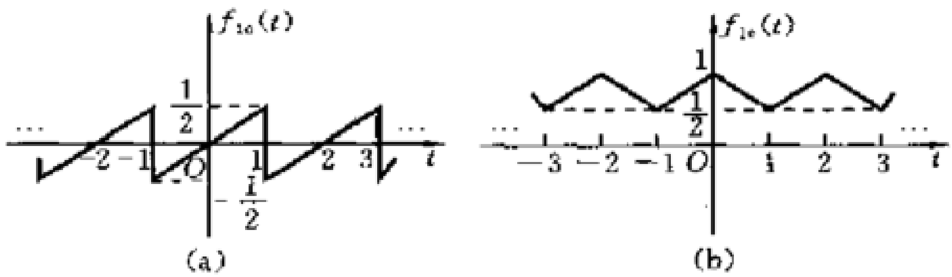
$$Fn=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(t)e^{-j\frac{n\pi}{2}t}dt=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}f(t)e^{-j\frac{n\pi}{2}t}dt$$

$$=j\frac{1}{2n\pi}\left(e^{-j\frac{n\pi}{2}}-e^{j\frac{n\pi}{2}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi},\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

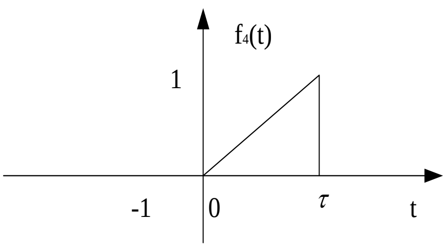
4.9 试画出下图所示信号的奇分量和偶分量



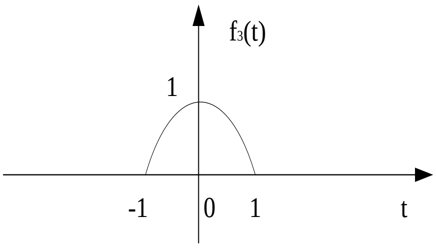
$f_1(t)$的奇分量和偶分量分别如下图（a）（b）所示。



4.13 求下列各信号的傅里叶变换



(b)



(c)

（b）由 $f_2(t)$ 波形可知，

$$f_2(t)\begin{cases}\frac{1}{\tau}t, 0 \le t \le \tau \\ 0, 其他\end{cases}$$

则傅里叶变换为

$$F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} t e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega t} - j\omega\tau e^{-j\omega\tau}}{-\omega^2 \tau}$$

（c）由 $f_3(t)$ 波形可知，

$$f_3(t)\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), -1 \le t \le 1 \\ 0, 其他\end{cases}$$

则傅里叶变换为

$$F_3(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\frac{\pi}{2} - \omega} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\frac{\pi}{2} + \omega} = \frac{\pi \cos\omega}{\frac{\pi^2}{4} - \omega^2}$$

4.18 求下列信号的傅里叶变换

（1） $f(t)=e^{-jt}\delta(t-2)$

因为$\delta(t)\leftrightarrow 1$，再由时移性和频移性，可得：

$$F(j\omega)=e^{-2j(\omega+1)}$$

（5） $f(t)=\varepsilon\left(\frac{1}{2}t-1\right)$

$f(t)=\begin{cases}1,t>2\\0,t<2\end{cases}$，即 $f(t)=\varepsilon(t-2)$

故 $F(j\omega)=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]e^{-j2\omega}$

4.20 若已知 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，试求下列函数的频谱

（1） $tf(2t)$

因为

$(-jt)f(t)\leftrightarrow\frac{d}{d\omega}F(j\omega)$

$tf(t)\leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F(j\omega)$

故 $\mathscr{F}[tf(2t)]\leftrightarrow j\frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)$

（4） $f(1-t)$

$f(-t)\leftrightarrow F(-j\omega)$

$f(-t+1)\leftrightarrow F(-j\omega)e^{-j\omega}$

故$\mathscr{F}f(1-t)\leftrightarrow F(-j\omega)e^{-j\omega}$

（5） $(1-t)f(1-t)$

$tf(t)\leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F(j\omega)$

$-tf(-t)\leftrightarrow -j\frac{d}{d\omega}F(-j\omega)$

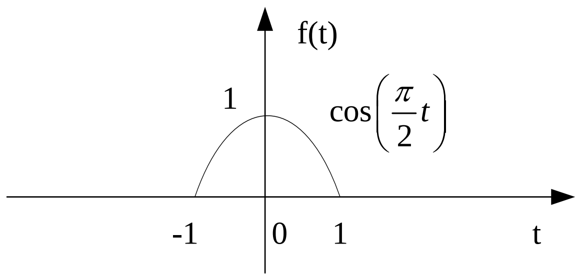
故$\mathscr{F}(-t+1)f(-t+1)\leftrightarrow -je^{-j\omega}\frac{d}{d\omega}F(-j\omega)$

4.24 试用下列方法求下列所示余弦脉冲的频谱函数。

（1）利用傅里叶变换定义

（2）利用微分、积分特性

（3）将它看作门函数 $g_2(t)$ 与周期余弦函数 $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ 的乘积



（1） $F\left(j\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^{j\frac{\pi}{2}t}+e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right)e^{-j\omega t}dt$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\frac{\pi}{2}-\omega}+\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}{\frac{\pi}{2}+\omega}=\frac{\pi\cos\omega}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}-\omega^{2}}$$

（2）由波形图可得闭合表示式为

$$f\left(t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[\varepsilon\left(t+1\right)-\varepsilon\left(t-1\right)\right]$$

则可得

$$f'\left(t\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[\varepsilon\left(t+1\right)-\varepsilon\left(t-1\right)\right]$$

$$\varepsilon\left(t+1\right)-\varepsilon\left(t-1\right)=g2\left(t\right)\leftrightarrow\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\leftrightarrow j\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)-\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

则由频谱卷积定理可得 f'(t)的频谱函数为

$$F_1(j\omega)=-j\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}{\omega+\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}{\omega-\frac{\pi}{2}}\right]$$

当 $\omega=0$ 时上式为 0，则由积分特性可知 f(t)的频谱函数为

$$F(j\omega)=\frac{F_1(j\omega)}{j\omega}=\frac{1}{j\omega}\bullet(-j)\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}{\omega+\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}{\omega-\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{\pi\cos\omega}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\omega^2}$$

（3）由 f(t)的波形可知

$$f(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)g_2(t)$$

又有 $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\leftrightarrow\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right]$，$g_2(t)\leftrightarrow 2Sa(\omega)$

则由频域卷积定理得频谱函数为

$$F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right]*2Sa(\omega)\right\}=Sa\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+Sa\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}{\omega+\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}{\omega-\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\cos\omega}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\omega^2}$$

4-30 求下列微分方程所描述的系统的频率响应 $H(j\omega)$。

$$(2)y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f'(t)+4f(t)$$

解：（2）令 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega), y(t)\leftrightarrow Y(j\omega),$ 对方程取傅里叶变换，得

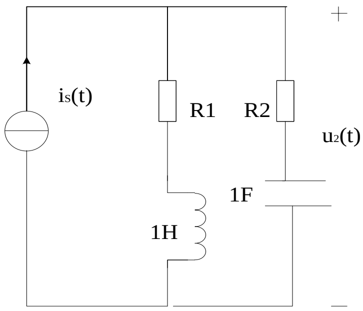
$$(j\omega)^2Y(j\omega)+5(j\omega)Y(j\omega)+6Y(j\omega)=(j\omega)F(j\omega)+4F(j\omega)$$

由上式可得系统的频率响应

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{(j\omega)+4}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}$$

4-31 求下图所示电路中, 输出电压$u_2(t)$对输入电流$i_s(t)$的频率响应$H(j\omega)=\dfrac{U_2(j\omega)}{I_s(j\omega)}$, 为

了能无失真的传输，试确认R_1, R_2的值。



解：图中电路系统的频率响应为：

$$H(j\omega)=\frac{U_2(j\omega)}{I_s(j\omega)}=\frac{(R_1+j\omega L)\bullet(R_2+\frac{1}{j\omega C})}{R_1+j\omega L+R_2+\frac{1}{j\omega C}}$$

代入数值整理得：

$$H(j\omega)=\frac{R_2(j\omega)^2+(1+R_1R_2)(j\omega)+R_1}{(j\omega)^2+(R_1+R_2)(j\omega)+1},$$

由于无失真传输系统频率响应满足

$$H(j\omega)=ke^{j\omega t_d}$$

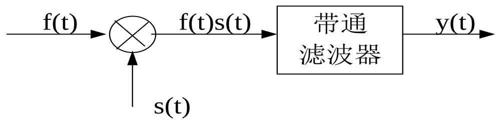
其中k, t_d均为常数，则必有

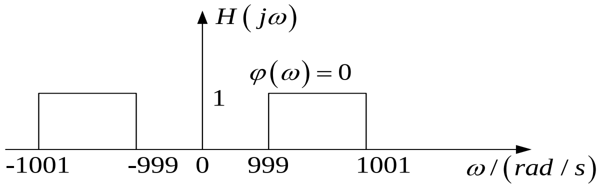
$$\frac{R_2}{1}=\frac{1+R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{R_1}{1}$$

解得$R_1=R_2=1\Omega$，故为了能无失真传输，R_1R_2应均为1Ω电阻。

4.45 如下图（a）的系统，带通滤波器的频谱响应如图（b）所示，其相频特性$\varphi(\omega)=0$，

若输入为$f(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}, s(t)=\cos(1000t)$，求输入信号 y(t)。





解：由于 $f(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\leftrightarrow F(j\omega)=\dfrac{1}{2}g_{4\pi}(\omega)$

$s(t)=\cos(1000t)\leftrightarrow S(j\omega)=\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$，

故
$$\begin{aligned} f(t)s(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(j\omega) \\ &= \frac{1}{4}[g_{4\pi}(\omega+1000)+g_{4\pi}(\omega-1000)] \end{aligned}$$

令 $x(t)=f(t)s(t)$，则

$$X(j\omega)=\frac{1}{4}[g_{4\pi}(\omega+1000)+g_{4\pi}(\omega-1000)]$$

带通滤波器对的输出 $y(t)$ 的频谱函数

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{4}[g_2(\omega+1000)+g_2(\omega-1000)]$$

因为 $\dfrac{1}{\pi}Sa(t)\leftrightarrow g_2(\omega)$

故
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4\pi}Sa(t)e^{-j1000t}+\frac{1}{4\pi}Sa(t)e^{j1000t}=\frac{1}{2\pi}Sa(t)\cos(1000t) \\ &= \frac{\sin t}{2\pi t}\cos(1000t) \end{aligned}$$