习题二

2.1 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应。

(1) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$

解：已知要求零输入响应 $y_{zi}(t)$，故而微分方程满足以下

$$y_{zi}''(t)+5y_{zi}'(t)+6y_{zi}(t)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

利用零输入响应中 $\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1 \\ y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-1 \end{cases}$

然后利用①式写出相应特征方程：$\lambda^2+5\lambda+6=0$　∴ $\begin{cases}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=-3\end{cases}$

∴零输入响应及其导数为　$y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

$y_{zi}'(t)=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}$

令 $t=0_+$，结合已求得 $y_{zi}(0_+)$ 和 $y_{zi}'(0_+)$ 去求解系数 C_1、C_2

∴ $y_{zi}(0_+)=C_1+C_2=1$

$y_{zi}'(0_+)=-2C_1-3C_2=-1$　∴ $\begin{cases}C_1=2\\ C_2=-1\end{cases}$　将其代回公式中　∴ $y_{zi}(t)=(2e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$.

(2) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-2$

解：类似(1)解法，设 $y_{zi}(t)$　∴满足微分方程 $y_{zi}''(t)+2y_{zi}'(t)+5y_{zi}(t)=0$.

利用零输入响应中

$\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=2 \\ y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=-2 \end{cases}$　其次列出特征方程 $\lambda^2+2\lambda+5=0$　∴ $\lambda_1=$

∴ $\lambda_1=-1+2j$　$\lambda_2=-1-j2$　一对共轭复根.

为复根.　∴解得 $C_1=2$，$C_2=0$.

∴ $y_{zi}(t)=2e^{-t}\cos(2t)$.

(3) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$

解：由特征方程可知 $\lambda^2+2\lambda+1=0$　∴ $\lambda=-1$　∴设 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2\cdot t\cdot e^{-t}$　2重实根

∴代入 $y_{zi}^{(j)}(0_+)=y_{zi}^{(j)}(0_-)=y^{(j)}(0_-)$

∴可解：$C_1=1$　$C_2=2$　∴零输入响应为 $y_{zi}(t)=e^{-t}+2te^{-t}$　$t\geq 0$.

2.2 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其 0_+ 值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$，$f(t)=\varepsilon(t)$.

解：因为要求其零时的响应，故要求出 $y_{zi}(0_+)$ 和 $y_{zs}(0_+)$.

扫描全能王 创建

2.4 已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应、零状态响应和全响应。

(1) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t)$，$y(0_-)=y'(0_-)=1$，$f(t)=\varepsilon(t)$

解：第一步求解零输入响应，满足特征方程 $\lambda^2+4\lambda+3=0$ ∴ $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=-3$

∴设零输入响应 $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$

又∵ $\begin{cases} y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1 \\ y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} 1=C_1+C_2 \\ 1=-C_1-3C_2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-1 \end{cases}$

∴ $y_{zi}(t)=2e^{-t}-e^{-3t}$

第二步求解零状态响应。$y_{zs}''(t)+4y_{zs}'(t)+3y_{zs}(t)=\varepsilon(t)$

应用积分法，$y_{zs}''(t)$ 里面含 $\varepsilon(t)$，∴

$\int_{0_-}^{0_+}y_{zs}''(t)dt+\int_{0_-}^{0_+}4y_{zs}'(t)dt+3\int_{0_-}^{0_+}y_{zs}(t)dt=\int_{0_-}^{0_+}\varepsilon(t)dt$

∴ $y_{zs}'(0_+)-y_{zs}'(0_-)=0$ $y_{zs}(0_+)-y_{zs}(0_-)=0$ 又∵在零状态中 $y_{zs}^{(j)}(0_-)=0$

∴由特征方程设零状态响应齐次解为 $y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-3t}$

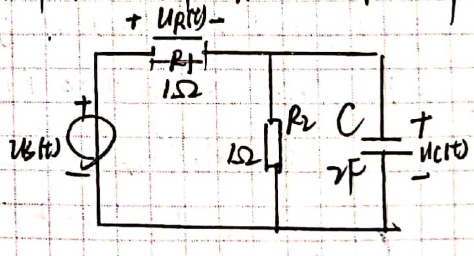
∴有 ~~$C_{zs1}+C_{zs2}=0$~~ ~~$C_{zs1}-3C_{zs2}=0$~~，先设其特解为 $y_p=\frac{1}{3}$ $y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-3t}+\frac{1}{3}$

∴ $\begin{cases} C_{zs1}+C_{zs2}+\frac{1}{3}=0 \\ -C_{zs1}-3C_{zs2}=0 \end{cases}$ ∴ $C_1=-\frac{1}{2}$，$C_2=\frac{1}{6}$ ∴ $y_{zs}(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3}$

∴系统的全响应为 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

$=\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-3t}+\frac{1}{3}$ $(t\geq0)$

2.9 如题2.9图所示电路，若以 $u_S(t)$ 为输入，$u_C(t)$ 为输出，试列出其微分方程，并求出冲激响应和阶跃响应。



解：KVL：$u_S(t)=u_R(t)+u_{R_2}(t)$

KCL：$i_R(t)=i_{R_2}(t)+i_C(t)$

$i_C(t)=C\frac{d}{dt}u_C(t)$

∴ $\frac{u_R(t)}{R}=u_C(t)+C\frac{d}{dt}u_C(t)$

$\frac{1}{R}[u_S(t)-u_C(t)]=u_C(t)+C\frac{d}{dt}u_C(t)$

∴整理可得如下微分方程

$2u_C'(t)+u_C(t)=u_S(t)$

设 $h(t)$ 为冲激响应，设中间值 $h_1(t)$

∴ $\begin{cases} 2h_1'(t)+h_1(t)=\delta(t) \\ h_1'(0_-)=h_1(0_-)=0 \end{cases}$ ∴ $\lambda=-\frac{1}{2}$ ∴ $h_1(t)=C_1e^{-\frac{1}{2}t}$

利用积分法 $\int_{0_-}^{0_+}2h_1'(t)+\int_{0_-}^{0_+}h_1(t)=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)$ ∴ $h_1(0_+)-h_1(0_-)=1$

∴ $h_1(0_+)=1$ 代入 $h_1(0_+)=1=C_1$ ∴ $h_1(t)=e^{-\frac{1}{2}t}$ $h_1'(t)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$

∴ $h(t)$ 和 $h_1(t)$ 满足微分方程右边 $h(t)=h_1(t)=e^{-\frac{1}{2}t}$