令

$$\|f(x)\| = \langle f(x), f(x)\rangle^{1/2} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2} \tag{1.3.11}$$

表示函数 $f(x)$ 的范数。

Gram-Schmidt 标准正交化算法如下:

$$\phi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|} \tag{1.3.12a}$$

$$\phi_2(x) = \frac{f_2(x) - \langle f_2(x), \phi_1(x)\rangle \phi_1(x)}{\|f_2(x) - \langle f_2(x), \phi_1(x)\rangle \phi_1(x)\|} \tag{1.3.12b}$$

$$\vdots$$

$$\phi_k(x) = \frac{f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k(x), \phi_i(x)\rangle \phi_i(x)}{\left\| f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k(x), \phi_i(x)\rangle \phi_i(x) \right\|}, \quad k = 2, \cdots, n \tag{1.3.12c}$$

以上算法也可利用矩阵范数写成

$$\left.\begin{aligned} d_k &= \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_k\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \cdots & \langle f_2, f_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle f_{k-1}, f_1\rangle & \langle f_{k-1}, f_2\rangle & \cdots & \langle f_{k-1}, f_k\rangle \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_k \end{vmatrix} \\ \phi_k &= \frac{d_k}{\langle d_k, d_k\rangle^{1/2}}, \quad k = 1, \cdots, n \end{aligned}\right\} \tag{1.3.13}$$

上式称为 Gram-Schmidt 标准正交化矩阵范数算法 [151]。式中 $|\cdot|$ 表示行列式的值。

1.4 信 号 变 换

在数字信号处理中, 大多数情况都假设信号是均匀采样的。如果是非均匀采样, 则基于均匀采样假设的信号处理理论和方法都将失去作用。因此, 希望能够有一种同时适用于均匀和非均匀采样信号的信号处理工具。信号变换正是这样一种工具。

1.4.1 信号变换的分类

考查一随机信号 $x(t)$, 它既可以是均匀采样的信号, 也可以是非均匀采样的信

号。为了对它进行分析与处理，将它展开成级数形式。令 $x(t)$ 为一实函数。若

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\mathrm{d}t < \infty \tag{1.4.1}$$

则称 $x(t)$ 是平方可积 (分) 函数，并记作 $x(t) \in L^2(R)$.

考虑使用一组函数 $\phi_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 将信号 $x(t) \in L^2(R)$ 展开成级数，即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \tag{1.4.2}$$

这一形式称为信号 $x(t)$ 的级数展开。那么，对函数 ϕ_k 有何种要求，展开系数 c_k 又如何确定呢？通常，展开系数 c_k 是使用信号 $x(t)$ 的某种积分形式来确定的，这一积分公式习惯称为信号变换。

以我们熟悉的 Fourier 分析为例。任何一个实函数 $x(t) \in L^2(R)$ 都具有一个 Fourier 级数表达式：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega t} \tag{1.4.3}$$

式中，展开常数

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.4.4}$$

称为实函数 $x(t)$ 的 Fourier 系数。式 (1.4.4) 即为信号变换公式。我们知道，

$$\cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}, \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega t}, \cdots \tag{1.4.5}$$

称为 Fourier 展开的基函数。

在更一般的情况下，为了保证函数 $x(t) \in L^2(R)$ 用 $\phi_k(t)$ 展开的惟一性，也要求 $\{\phi_k(t)\}$ 构成一基函数。粗略地讲，基函数就是一组基本的函数，其元素一个都不能少，否则就无法用式 (1.4.2) 惟一表示信号 $x(t)$。基函数的严格数学定义如下。

定义 1.4.1 令 $x(t) \in L^2(R)$，称 $\{\phi_k(t)\}$ 是 Hilbert 空间 (参见附录 A) 的一组基函数，若

(1) $\phi_k(t), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 相互线性独立，即对于任意 k，$\phi_k(t)$ 不可能是其他元素的线性组合；

(2) $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ $(\forall k \in Z)$ 意味着 $x = 0$。

条件 (1) 称为基函数的线性独立性，条件 (2) 称为基函数的完备性。只有同时满足线性独立性和完备性的一组函数才能作为线性展开的基函数。

为了进一步认识基函数的上述要求，让我们来看一个比较简单的信号变换例子。设

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\phi_i(t) \tag{1.4.6}$$

并假定 $\phi_1(t)$ 与其他函数 $\phi_k(t), k=2,3,\cdots$ 线性相关，即有

$$\phi_1(t)=\sum_{i=2}^{\infty}h_i\phi_i(t) \tag{1.4.7}$$

将式 (1.4.7) 代入信号变换公式 (1.4.6)，立即得到

$$x(t)=\sum_{i=2}^{\infty}(c_i+c_1h_i)\phi_i(t)$$

这意味着，即使不使用 $\phi_1(t)$，照样可以用其他函数 $\phi_k, k=2,3,\cdots$ 来表征信号 $x(t)$。换句话说，函数 $\phi_1(t)$ 是多余的，它不是基函数中不可缺少的成员。

使用正交基函数的信号变换称为正交信号变换，使用非正交基的信号变换称为非正交信号变换。在非正交信号变换中，通常在信号的级数展开和信号 (积分) 变换中使用两组不同的基函数。此时，级数展开式 (1.4.2) 中的展开系数 c_k 表示成信号 $x(t)\in L^2(R)$ 的积分变换：

$$c_k=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)g_k^*(t)\mathrm{d}t \quad (\text{非正交信号变换}) \tag{1.4.8}$$

式中 $*$ 表示复数共轭。这一积分变换称为非正交信号变换。

在非正交信号变换中，有一种特殊情况是非常有用的：两组基函数 $\{\phi_k(t)\}$ 和 $\{g_k(t)\}$ 虽然都不是正交基，但它们共同构成所谓的对偶基函数。

定义 1.4.2 如果 $\{\phi_k(t)\}$ 和 $g_k(t)\}$ 是两组不同的基函数，并且满足正交条件

$$\langle g_i,\phi_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1.4.9}$$

则称 $\{g_k(t)\}$ 是 $\{\phi_k(t)\}$ 的对偶基函数。

式 (1.4.9) 所示正交称为双正交。顾名思义，双正交描述的是两个函数之间的正交关系，但是两个函数的本身都不是正交基函数。此时，积分变换式 (1.4.8) 称为双正交信号变换。

需要指出的是，如果将基函数 $\{\phi_k(t)\}$ 和 $\{g_k(t)\}$ 互换位置，则函数展开式 (1.4.2) 和信号变换式 (1.4.8) 仍然成立。这就是为什么把 $\{g_k(t)\}$ 称为 $\{\phi_k(t)\}$ 的对偶基函数的原因。注意，“对偶”是相互的，因此 $\{\phi_k(t)\}$ 也是 $\{g_k(t)\}$ 的对偶基函数。

在对偶基中，有一个令我们特别感兴趣的例子，这就是标准正交基。

定义 1.4.3 基函数 $\{\phi_k(t)\}$ 称为标准正交基，若它满足以下两个条件：

$$\langle \phi_k, \phi_i \rangle = \int_a^b \phi_k(t)\phi_i^*(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \forall k \neq i \tag{1.4.10}$$

和

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle = \int_a^b |\phi_k|^2\mathrm{d}t = 1 \tag{1.4.11}$$

Fourier 分析的基函数 (1.4.5) 就是一个典型的标准正交基。满足式 (1.4.10) 但不满足式 (1.4.11) 的基函数称为正交基。比较定义 1.4.2 和定义 1.4.3 易知，标准正交基的对偶基就是标准正交基自身。

当 $\{\phi_k(t)\}$ 是一组标准正交基时，式 (1.4.2) 所示的信号展开称为 Karhunen-Loeve 展开，简称 K-L 展开。由于标准正交基函数 $\phi_k(t)$ 的对偶基就是基函数自身，即 $g_k(t) = \phi_k(t)$，所以信号变换公式 (1.4.8) 简化为

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi_k^*(t)\mathrm{d}t \quad (\text{正交信号变换}) \tag{1.4.12}$$

这一变换习惯称为信号 $x(t)$ 的 Karhunen-Loeve 变换，简称 K-L 变换。

对信号变换加以归纳，我们可以看出正交信号变换、非正交信号变换和双正交信号变换的如下关系：

(1) 非正交信号变换使用不同的级数展开基函数和信号变换基函数，它们都是非正交基。

(2) 双正交信号变换在级数展开和信号变换中也使用两种不同的非正交的基函数，但这两组基函数彼此正交 (双正交)。

(3) 正交信号变换在级数展开和信号变换中使用同一组基函数，并且这组基函数是正交基。

1.4.2 非正交基函数的转换

除了上述关系外，一组非正交的基函数通过不同的转换，可以变成标准正交基函数或构造出它的对偶基函数。

1. Gram-Schmidt 标准正交化

如果 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ 为基向量，则通过 Gram-Schmidt 标准正交化，可以将它们转换成标准正交基向量 $\boldsymbol{\phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}_n$。

Gram-Schmidt 标准正交化的递推公式如下：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{f}_1 \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{f}_2 - a_{21}\boldsymbol{f}_1 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\boldsymbol{f}_i
\end{aligned}
\tag{1.4.13}
$$

式中

$$a_{k,i} = \frac{\langle \boldsymbol{f}_k, \boldsymbol{v}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i\rangle}, \quad k \geqslant 2,\ i = 1, \cdots, k-1 \tag{1.4.14}$$

基向量 $\boldsymbol{\phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}_n$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{\phi}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|}, \quad \forall k = 1, \cdots, n \tag{1.4.15}$$

向量 $\boldsymbol{\phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}_n$ 组成一标准正交基。

Gram-Schmidt 标准正交化在许多信号处理问题中都有着重要的应用，是一种常用的信号预处理方法。关于它的应用，将在以后的章节里陆续介绍。

2. 对偶基函数的构造

考虑离散时间信号 $x(t_k), k = 1, \cdots, N$ 的线性变换，即使用有限项级数展开

$$\hat{x}(t_k) = \sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i(t_k), \quad k = 1, \cdots, N \tag{1.4.16}$$

逼近信号 $x(t_k)$。为了获得最优逼近，采用最小二乘法，即

$$J = \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i(t_k) - x(t_k)\right]^2 = \min \tag{1.4.17}$$

求 J 关于展开系数 $c_j, j = 1, \cdots, m$ 的偏导数，并令其为零，得

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 2\left[\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{k=1}^{N}\phi_i(t_k)\phi_j(t_k) - \sum_{k=1}^{N} x(t_k)\phi_j(t_k)\right] = 0, \quad j = 1, \cdots, m$$

或写作

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}c_i = \beta_j, \quad j = 1, \cdots, m \tag{1.4.18}$$

式中

$$\alpha_{ij}=\sum_{k=1}^{N}\phi_i(t_k)\phi_j(t_k) \tag{1.4.19a}$$

$$\beta_j=\sum_{k=1}^{N}x(t_k)\phi_j(t_k) \tag{1.4.19b}$$

定义

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm}\end{bmatrix} \tag{1.4.20a}$$

$$\boldsymbol{c}=[c_1,\cdots,c_m]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.20b}$$

$$\boldsymbol{b}=[\beta_1,\cdots,\beta_m]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.20c}$$

则式 (1.4.18) 可以用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{Ac}=\boldsymbol{b} \tag{1.4.21}$$

由式 (1.4.19a) 和式 (1.4.20a) 容易证明

$$\mathrm{a}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \tag{1.4.22}$$

式中

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN}\end{bmatrix} \tag{1.4.23}$$

其中 $\phi_{ik}=\phi_i(t_k)$。

记

$$\boldsymbol{x}=[x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_N)]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.24a}$$

$$\boldsymbol{b}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.24b}$$

则式 (1.4.19b) 可以改写作

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\Phi x} \tag{1.4.25}$$

将式 (1.4.21) 代入式 (1.4.25) 即有

$$\boldsymbol{Ac}=\boldsymbol{\Phi x}$$

或

$$c = A^{-1}\Phi x = Gx \tag{1.4.26}$$

式中

$$G = A^{-1}\Phi = (\Phi\Phi^{\mathrm{T}})^{-1}\Phi \tag{1.4.27}$$

式 (1.4.26) 可等价写作

$$c_i = \sum_{k=1}^{N} g_{ik}x(t_k) = \sum_{k=1}^{N} g_i(t_k)x(t_k), \quad i = 1, \cdots, m \tag{1.4.28}$$

这就是信号变换公式。

下面讨论信号变换的基函数 $\{g_i(t_k), i = 1, \cdots, m; k = 1, \cdots, N\}$ 与信号级数展开的基函数 $\{\phi_i(t_k), i = 1, \cdots, m; k = 1, \cdots, N\}$ 之间的关系。利用式 (1.4.27) 易知

$$G\Phi^{\mathrm{T}} = (\Phi\Phi^{\mathrm{T}})^{-1}\Phi\Phi^{\mathrm{T}} = I \tag{1.4.29}$$

这意味着

$$\sum_{k=1}^{N} g_i(t_k)\phi_j(t_k) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{1.4.30}$$

对所有 $i, j = 1, \cdots, m$ 成立。

式 (1.4.30) 表明，基函数 $g_i(t_k)$ 恰好是另一基函数 $\phi_i(t_k)$ 的对偶基。因此，式 (1.4.27) 给出了由一非正交基函数构造其对偶基函数的方法。

除了 Fourier 变换外，信号变换的典型例子还有 Gabor 变换和小波变换，它们都是极为重要的信号处理技术，将在第 6 章详细介绍这两种信号变换。

1.5 具有随机输入的线性系统

1.2 节和 1.3 节讨论了任意两个随机信号之间的统计关系。在大量的信号处理应用中，通常对一线性系统的随机输入与输出之间的统计关系感兴趣，尤其对系统输出的功率谱密度感兴趣。

1.5.1 系统输出的功率谱密度

如果一线性系统是时不变的，并且其输入是随机信号 $\{x(t)\}$，则系统输出 $y(t)$