信号与系统

主讲：李军

2020.03

第三章 离散系统的时域分析

3.1 LTI离散系统的响应

一、 差分与差分方程

二、 差分方程的经典解

三、 零输入响应和零状态响应

3.2 单位序列响应和阶跃响应

一、单位序列响应

二、阶跃响应

连续时间信号、连续时间系统

连续时间信号：

f(t)是连续变化的t的函数，除若干不连续点之外对于任意时间值都可以给出确定的函数值。函数的波形都是具有平滑曲线的形状，一般也称模拟信号。

模拟信号、抽样信号、量化信号

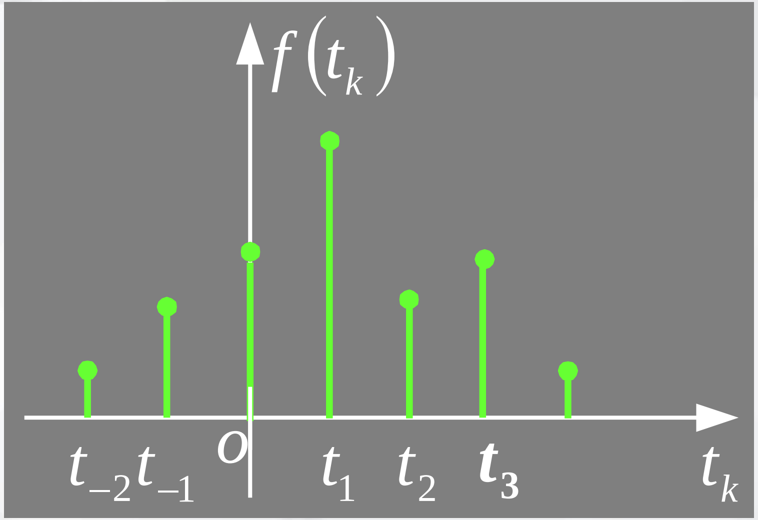
连续时间系统：

系统的输入、输出都是连续的时间信号。

离散时间信号：

时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。

离散信号可以由模拟信号抽样而得，也可以由实际系统生成。



离散时间系统：

系统的输入、输出都是离散的时间信号。如数字计算机。

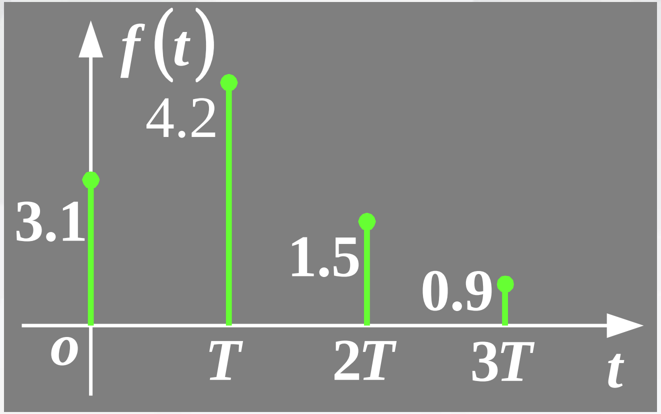
离散时间系统的优点

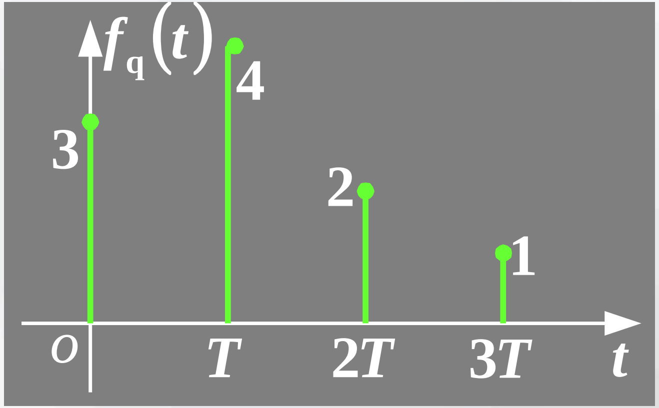
- 便于实现大规模集成，从而在重量和体积方面显示其优越性；
- 容易作到精度高，模拟元件精度低，而数字系统的精度取决于位数；
- 可靠性好；

离散时间系统的优点

- 存储器的合理运用使系统具有灵活的功能；
- 易消除噪声干扰；
- 数字系统容易利用可编程技术，借助于软件控制，大大改善了系统的灵活性和通用性；
- 易处理速率很低的信号。

量化





采样过程就是对模拟信号的时间取离散的量化值过程——得到离散信号。

幅值量化——幅值只能分级变化。

数字信号：

离散信号在各离散点的幅值被量化的信号。

离散时间系统的困难和缺点

高速时实现困难，设备复杂，成本高，通信系统由模拟转化为数字要牺牲带宽。

应用前景

由于数字系统的优点，使许多模拟系统逐步被淘汰，被数字（更多是模／数混合）系统所代替；

人们提出了“数字地球”、“数字化世界”、“数字化生存”等概念，数字化技术逐步渗透到人类工作与生活的每个角落。数字信号处理技术正在使人类生产和生活质量提高到前所未有的新境界。

混合系统

混合系统：

连续时间系统与离散时间系统联合应用。如自控系统、数字通信系统。需要A/D、D/A转换。

不能认为数字技术将取代一切连续时间系统的应用

- 人类在自然界中遇到的待处理信号相当多的是连续时间信号，需经A/D、D/A转换。

混合系统

混合系统：

连续时间系统与离散时间系统联合应用。如自控系统、数字通信系统。需要A/D、D/A转换。

不能认为数字技术将取代一切连续时间系统的应用

- 当频率较高时，直接采用数字集成器件尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便。
- 最佳地协调模拟与数字部件已成为系统设计师的首要职责。

系统分析

连续时间系统——微分方程描述

- 时域分析
  - 经典法：齐次解+特解
  - 零输入响应+零状态响应
- 变换域分析:拉氏变换法

离散时间系统——差分方程描述

差分方程的解法与微分方程类似

- 时域分析
  - 经典法：齐次解+特解
  - 零输入响应+零状态响应
- 变换域分析:z变换法

学习方法

注意离散系统与连续系统分析方法上的联系、区别、对比，与连续系统有并行的相似性。和前几章对照，温故而知新。

3.1　LTI离散系统的响应

一、差分与差分方程

设有序列f(k)，则…，f(k+2)，f(k+1)，…，f(k-1)，f(k-2)…等称为f(k)的移位序列。

仿照连续信号的微分运算，定义离散信号的差分运算。

1. 差分运算

$$\frac{\mathrm{d}\, f(t)}{\mathrm{d}\, t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

离散信号的变化率有两种表示形式：

$$\frac{\Delta f(k)}{\Delta k} = \frac{f(k+1) - f(k)}{(k+1) - k} \qquad \frac{\nabla f(k)}{\nabla k} = \frac{f(k) - f(k-1)}{k-(k-1)}$$

因此，可定义：

（1）一阶前向差分定义：$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

（2）一阶后向差分定义：$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

式中，Δ和∇称为差分算子，无原则区别。本书主要用后向差分，简称为差分。

（3）差分的线性性质：

$$\nabla[af_1(k) + bf_2(k)] = a\nabla f_1(k) + b\nabla f_2(k)$$

因此，可定义：

（4）二阶差分定义：

$$\nabla^2 f(k) = \nabla[\nabla f(k)] = \nabla[f(k) - f(k-1)] = \nabla f(k) - \nabla f(k-1)$$

$$= f(k) - f(k-1) - [f(k-1) - f(k-2)] = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

（5）m阶差分:

$$\nabla^m f(k) = f(k) + b_1 f(k-1) + \cdots + b_m f(k-m)$$

2. 差分方程

包含未知序列y(k)及其各阶差分的方程式称为差分方程。将差分展开为移位序列，得一般形式

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=b_mf(k)+\cdots+b_0f(k-m)$$

差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

2. 差分方程

例：若描述某系统的差分方程为

$$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = f(k)$$

已知初始条件$y(0)=0, y(1)=2$,激励$f(k)=2^k\varepsilon(k)$,求$y(k)$。

解：$y(k) = -3y(k-1) - 2y(k-2) + f(k)$

$$y(2) = -3y(1) - 2y(0) + f(2) = -2$$

$$y(3) = -3y(2) - 2y(1) + f(3) = 10 \quad \cdots\cdots$$

一般不易得到解析形式的(闭合)解。

二、差分方程的经典解

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_0y(k-n) = b_mf(k) + \cdots + b_0f(k-m)$$

与微分方程经典解类似，$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$

1. 齐次解$y_h(k)$

齐次方程 $y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0y(k-n) = 0$

其特征方程为 $1 + a_{n-1}\lambda^{-1} + \ldots + a_0\lambda^{-n} = 0$，

即 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

其根λ_i($i = 1, 2, \cdots, n$)称为差分方程的特征根。

1. 齐次解yh(k)

齐次解的形式取决于特征根。

当特征根 λ 为单根时，齐次解y_n (k)形式为： $C\lambda^k$

当特征根 λ 为r重根时，齐次解y_n (k)形式为：

$$(C_{r-1}k^{r-1}+ C_{r-2}k^{r-2}+\dots+ C_1k+C_0)\lambda^k$$

2. 特解$y_p(k)$: 特解的形式与激励的形式雷同($r \geqslant 1$)。

（1） 激励$f(k) = k^m$ ($m \geqslant 0$)

①所有特征根均不等于1时;

$$y_p(k)=P_m k^m+\ldots+P_1 k+P_0$$

②有r重等于1的特征根时;

$$y_p(k)=k^r[P_m k^m+\ldots+P_1 k+P_0]$$

2. 特解$y_p(k)$: 特解的形式与激励的形式雷同($r \geqslant 1$) 。

(2) 激励$f(k)=a^k$

①当a不等于特征根时;

$$y_p(k)=Pa^k$$

②当a是r重特征根时;

$$y_p(k)=(P_r k^r+P_{r-1}k^{r-1}+\ldots+P_1 k+P_0)a^k$$

2. 特解$y_p(k)$: 特解的形式与激励的形式雷同($r \geq 1$) 。

（3） 激励$f(k)=\cos(\beta k)$或$\sin(\beta k)$ 且**所有特征根均不等于$e^{\pm j\beta}$**；

$$y_p(k)=P\cos(\beta k)+Q\sin(\beta k)$$

例：若描述某系统的差分方程为

$$y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$$

已知初始条件$y(0)=0$，$y(1)=-1$；激励$f(k)=2^k$，$k\geqslant 0$。求方程的全解。

解： 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$

可解得特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，其齐次解

$$y_h(k)=(C_1k+C_2)(-2)^k$$

特解为 $y_p(k)=P(2)^k$，$k\geq0$

代入差分方程得 $P(2)^k+4P(2)^{k-1}+4P(2)^{k-2}=f(k)=2^k$，

解得 $P=1/4$

所以得特解： $y_p(k)=2^{k-2}$，$k\geq0$

故全解为 $y(k)=y_h+y_p=(C_1k+C_2)(-2)^k+2^{k-2}$，$k\geq0$

代入初始条件解得 $C_1=1$，$C_2=-1/4$

三、 零输入响应和零状态响应

$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$ ，也可以分别用经典法求解。

$$y(j) = y_{zi}(j) + y_{zs}(j) \ , \ j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

设激励f(k)在k=0时接入系统,

通常以$y(-1), y(-2), \cdots, y(-n)$描述系统的初始状态。

$$y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = \cdots = y_{zs}(-n) = 0$$

所以 $y(-1)=y_{zi}(-1), y(-2)=y_{zi}(-2), \cdots, y(-n)=y_{zi}(-n)$

然后利用迭代法分别求得零输入响应和零状态响应的初始值$y_{zi}(j)$和$y_{zs}(j)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

例：若描述某离散系统的差分方程为

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$$

已知激励$f(k)=2^k$, $k\geqslant 0$，初始状态$y(-1)=0$, $y(-2)=1/2$, 求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解：（1）$y_{zi}(k)$满足方程 $y_{zi}(k)+3y_{zi}(k-1)+2y_{zi}(k-2)=0$

其初始状态$y_{zi}(-1)=y(-1)=0, y_{zi}(-2)=y(-2)=1/2$

首先递推求出初始值$y_{zi}(0), y_{zi}(1)$,

$$y_{zi}(k)=-3y_{zi}(k-1)-2y_{zi}(k-2)$$

$$y_{zi}(0)=-3y_{zi}(-1)-2y_{zi}(-2)=-1,$$

$$y_{zi}(1)=-3y_{zi}(0)-2y_{zi}(-1)=3$$

解：

方程的特征根为 $\lambda_1 = -1$， $\lambda_2 = -2$ ，

其解为 $y_{zi}(k)=C_{zi}1(-1)^k+C_{zi}2(-2)^k$

将初始值代入 并解得 $C_{zi1}=1, C_{zi2}=-2$

所以 $y_{zi}(k)=(-1)^k-2(-2)^k \quad , k\geqslant 0$

解：（2）零状态响应yzs(k) 满足

$$y_{zs}(k)+3y_{zs}(k-1)+2y_{zs}(k-2)=f(k)$$

初始状态$y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=0$

递推求初始值 $y_{zs}(0), y_{zs}(1),$

$$y_{zs}(k)=-3y_{zs}(k-1)-2y_{zs}(k-2)+2^k, k\geqslant 0$$

$$y_{zs}(0)=-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)+1=1$$

$$y_{zs}(1)=-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)+2=-1$$

解：

分别求出齐次解和特解，得

$$y_{zs}(k) = C_{zs1}(-1)k + C_{zs2}(-2)^{k} + yp(k)$$

$$= C_{zs1}(-1)k + C_{zs2}(-2)^{k} + (1/3)2^{k}$$

代入初始值求得 $C_{zs1} = -1/3$, $C_{zs2} = 1$

所以 $y_{zs}(k) = -(-1)^{k}/3 + (-2)^{k} + (1/3)2^{k}$, $k \geqslant 0$

3.2　单位序列响应和阶跃响应

一、单位序列响应

由单位序列δ(k)所引起的零状态响应称为单位序列响应或单位样值响应或单位取样响应，或简称单位响应，记为h(k)。$h(k)=T[\{0\},\delta(k)]$

例1 已知某系统的差分方程为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$ 求单位序列响应h(k)。

解 根据h(k)的定义 有

$$h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k) \qquad (1)$$

$$h(-1)=h(-2)=0$$

（1）递推求初始值h(0)和h(1)。

方程（1）移项写为

$$h(k)=h(k-1)+2h(k-2)+\delta(k)$$

$$h(0)=h(-1)+2h(-2)+\delta(0)=1$$

$$h(1)=h(0)+2h(-1)+\delta(1)=1$$

例1 已知某系统的差分方程为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$ 求单位序列响应h(k)。

(2) 求h(k)。 对于k >0， h(k)满足齐次方程

$$h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=0$$

其特征方程为 $(\lambda+1)(\lambda-2)=0$

所以 $h(k)=C_1(-1)^k+C_2(2)^k$， $k>0$

$h(0)=C_1+C_2=1$，$h(1)=-C_1+2C_2=1$

解得$C_1=1/3$，$C_2=2/3$

$$h(k)=(1/3)(-1)^k+(2/3)(2)^k\text{，}k\geqslant 0$$

或写为$h(k)=[(1/3)(-1)^k+(2/3)(2)^k]\varepsilon(k)$

例2：若方程为：

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)-f(k-2)$$

求单位序列响应h(k)

解 h(k)满足

$$h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k)-\delta(k-2)$$

令只有δ(k)作用时，系统的单位序列响应h1(k)，

它满足

$$h_1(k)-h_1(k-1)-2h_1(k-2)=\delta(k)$$

例2：若方程为：

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)-f(k-2)$$

求单位序列响应h(k)

解

根据线性时不变性，

$$h(k) = h_1(k) - h_1(k-2) = [(1/3)(-1)^k + (2/3)(2)^k]\varepsilon(k) -$$

$$[(1/3)(-1)^{k-2} + (2/3)(2)^{k-2}]\varepsilon(k-2)$$

二、阶跃响应

由于

$$\varepsilon(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)\quad,\quad \delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\nabla\varepsilon(k)$$

所以 $g(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)\quad,\quad h(k)=\nabla g(k)$

两个常用的求和公式：

$$\begin{cases}\sum_{k_1}^{k_2}a^j=\begin{cases}\dfrac{a^{k_1}-a^{k_2+1}}{1-a} & a\neq 1\\ k_2-k_1+1 & a=1\end{cases} & (k_2\geqslant k_1)\\ \sum_{j=k_1}^{k_2}j=\dfrac{(k_2+k_1)(k_2-k_1+1)}{2}\end{cases}$$

作业：

3.6(4)、3.10(b)

第三章 离散系统的时域分析

3.3 卷积和

一、序列分解与卷积和

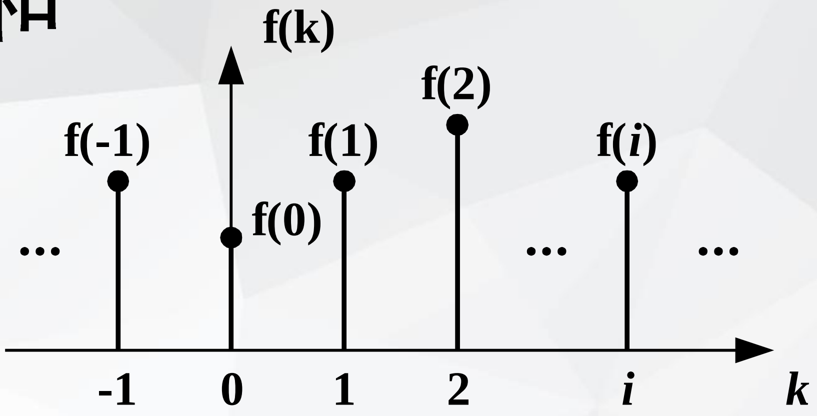
二、卷积的图解

三、不进位乘法

四、卷积和的性质

3.3 卷积和

一、卷积和



1 .序列的时域分解

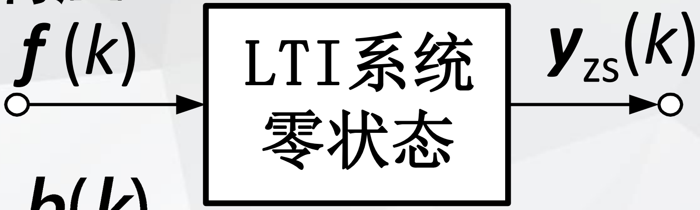
任意离散序列f(k) 可表示为

$$f(k)=\cdots+f(-1)\,\delta(k+1)+f(0)\,\delta(k)+f(1)\,\delta(k-1)+$$

$$f(2)\,\delta(k-2)+\cdots+f(i)\,\delta(k-i)+\cdots$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)$$

2.任意序列作用下的零状态响应



根据h(k)的定义： $\delta(k) \longrightarrow h(k)$

由时不变性： $\delta(k-i) \longrightarrow h(k-i)$

由齐次性： $f(i)\,\delta(k-i) \longrightarrow f(i)\,h(k-i)$

由叠加性： $\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)}_{\| \atop f(k)} \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)}_{\| \atop y_{zs}(k)}$

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$$ 卷积和

3 .卷积和的定义

已知定义在区间（ - ∞， ∞）上的两个函数f1(k)和f2(k)，则定义和

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$$

为f1(k)与f2(k)的卷积和，简称卷积；记为

f(k)= f1(k)*f2(k)

注意：求和是在虚设的变量 i 下进行的， i 为求和变量，k 为参变量。结果仍为k 的函数。

$$\boxed{y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)= f(k)*h(k)}$$

例：$f(k)=a^{k}\varepsilon(k)$，$h(k)=b^{k}\varepsilon(k)$，求$y_{zs}(k)$。

解：$y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a^{i}\varepsilon(i)b^{k-i}\varepsilon(k-i)$$

当$i<0$, $\varepsilon(i)=0$；当$i>k$时，$\varepsilon(k-i)=0$

$$y_{zs}(k)=\left[\sum_{i=0}^{k} a^{i}b^{k-i}\right]\varepsilon(k)=b^{k}\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{i}\right]\varepsilon(k)=\begin{cases} b^{k}\dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{a}{b}} & ,a\neq b \\ b^{k}(k+1) & ,a=b \end{cases}$$

$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k)$

二、卷积的图解法

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\,f_2(k-i)$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元：k换为 i→得 f1(i)，f2(i)

（2）反转平移：由f2(i)反转→ f2(－i)右移k → f2(k － i)

（3）乘积：f1(i) f2(k － i)

（4）求和：i 从 －∞到∞对乘积项求和。

注意：k 为参变量。

下面举例说明。

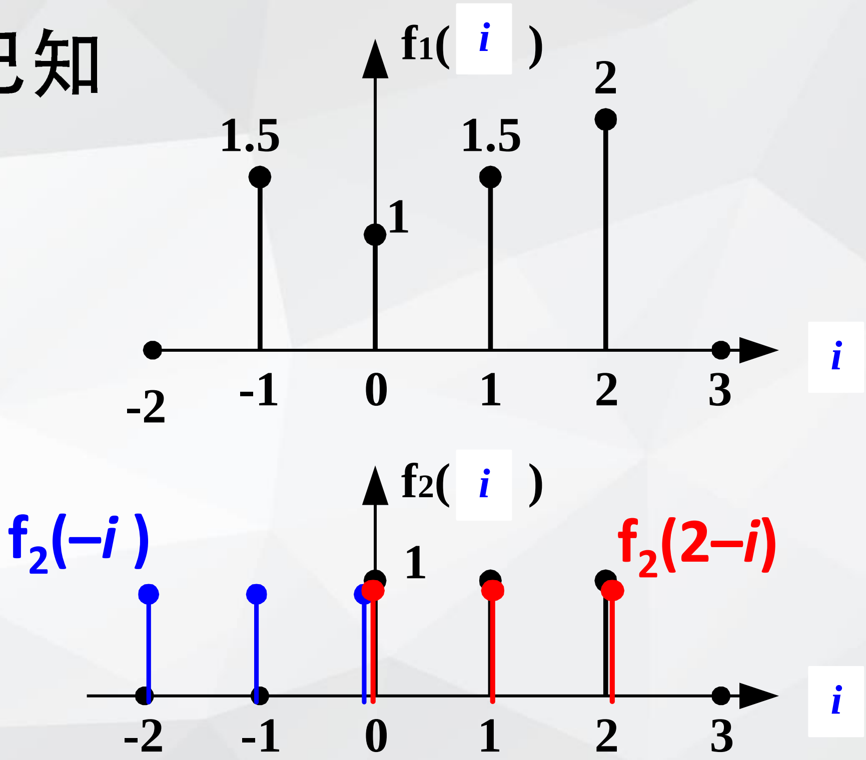
例：$f_1(k)$、 $f_2(k)$如图所示，已知 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$，求$f(2)$ =?

解：$$f(2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(2-i)$$

（1）换元

（2）$f_2(i)$反转得$f_2(-i)$

（3）$f_2(-i)$右移2得$f_2(2-i)$

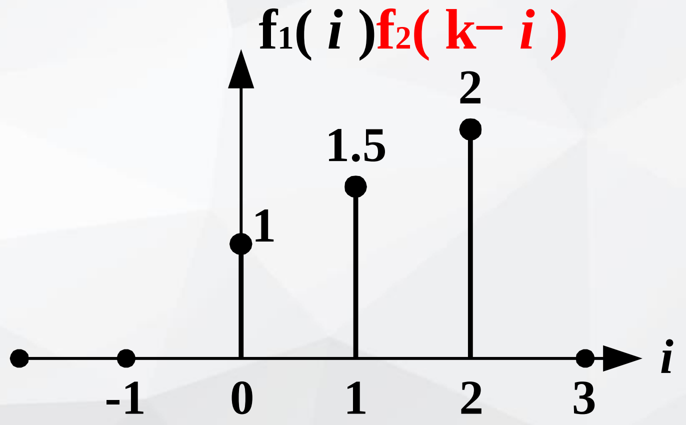


例：$f_1(k)$、 $f_2(k)$如图所示，已知 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$，求$f(2) =?$

解：$f(2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(2-i)$

（4） $f_1(i)$乘$f_2(2 - i)$

（5）求和，得$f(2) = 4.5$



三、不进位乘法求卷积

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)f_2(k-i)$$

$$=\cdots+f_1(-1)f_2(k+1)+f_1(0)f_2(k)+f_1(1)f_2(k-1)+f_1(2)f_2(k-2)$$

$$+\cdots+f_1(i)f_2(k-i)+\cdots$$

f(k)=所有两序列序号之和为k 的那些样本乘积之和。

如k=2时

$$f(2)=\cdots+f_1(-1)f_2(3)+f_1(0)f_2(2)+f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)+\cdots$$

例 $f_1(k)=\{0,\quad f_1(1),\quad f_1(2),\quad f_1(3),\quad 0\}$

$f_2(k)=\{0,\quad f_2(0),\quad f_2(1),\quad 0\}$

排成乘法

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & & f_1(1), & f_1(2), & f_1(3) \\
\times & & & & f_2(0), & f_2(1) \\
\hline
 & & & f_1(1)f_2(1), & f_1(2)f_2(1), & f_1(3)f_2(1) \\
 & & f_1(1)f_2(0), & f_1(2)f_2(0), & f_1(3)f_2(0) & \\
+ & & & & & \\
\hline
 & & f_1(1)f_2(0) & f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0) & f_1(3)f_2(1)
\end{array}
$$

$$f(k)=\{\,0,\ \ f_1(1)f_2(0),\ \ f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0),\ \ f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0),\ \ f_1(3)f_2(1),\ \ 0\,\}$$

例 $f_1(k) = \{0,\ 2,\ 1,\ 5,\ 0\}$

$\uparrow k=1$

$f_2(k) = \{0,\ 3,\ 4,\ 0,\ 6,\ 0\}$

$\uparrow k=0$

求 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$

解

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3, & 4, & 0, & 6 \\
\times & & & 2, & 1, & 5 \\
\hline
 & & 15, & 20, & 0, & 30 \\
 & 3, & 4, & 0, & 6 & \\
6, & 8, & 0, & 12 & & \\
\hline
6, & 11, & 19, & 32, & 6, & 30
\end{array}
$$

$f(k) =$
$\{0,\ 6,\ 11,\ 19,\ 32,\ 6,\ 30\}$

$\uparrow k=1$

教材上还提出一种列表法，本质是一样的。

四、卷积和的性质

1. 满足乘法的三律：(1) 交换律, (2) 分配律,(3) 结合律.

2. $f(k)*\delta(k)=f(k)$， $f(k)*\delta(k-k_0)=f(k-k_0)$

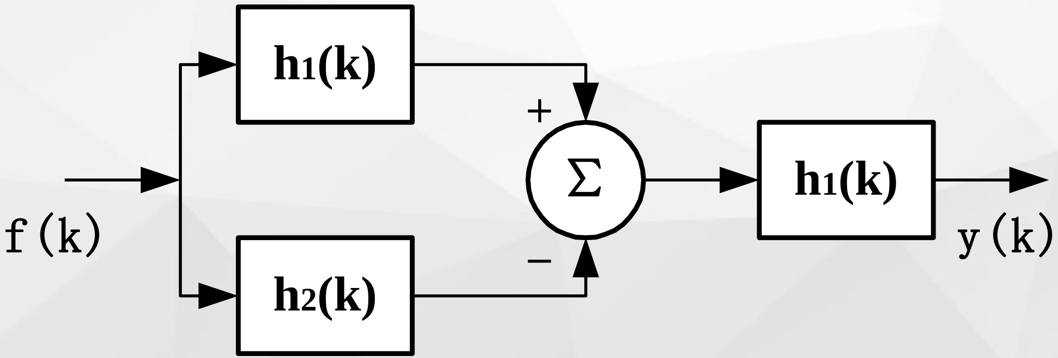
3. $f(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

4. $f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f_1(k-k_1-k_2)*f_2(k)$

5. $\nabla[f_1(k)*f_2(k)]=\nabla f_1(k)*f_2(k)=f_1(k)*\nabla f_2(k)$

求卷积和是本章的重点。

例1　如图复合系统由三个子系统组成，其中 $h_1(k) = \varepsilon(k)$，$h_2(k) = \varepsilon(k-5)$，求复合系统的单位序列响应$h(k)$。



解 根据h(k)的定义，有

$$h(k)=[\delta(k)*h_1(k)-\delta(k)*h_2(k)]*h_1(k)$$

$$=[h_1(k)-h_2(k)]*h_1(k)$$

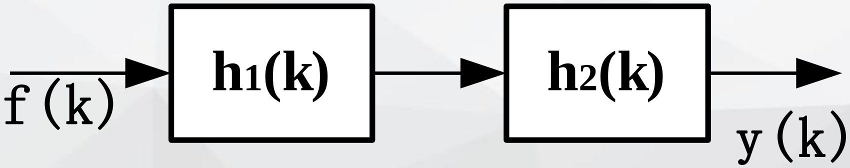
$$=h_1(k)*h_1(k)-h_2(k)*h_1(k)$$

$$=\varepsilon(k)*\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)*\varepsilon(k)$$

$$=(k+1)\varepsilon(k)-(k+1-5)\varepsilon(k-5)$$

$$=(k+1)\varepsilon(k)-(k-4)\varepsilon(k-5)$$

例2　如图复合系统由两个子系统级联组成，其中$h_1(k)=2\cos(k\pi)$，$h_2(k)=a^k\varepsilon(k)$，激励$f(k)=\delta(k)-a\delta(k-1)$，求复合系统的零状态响应响应$y_{zs}(k)$。



解 $y_{zs}(k) = f(k) * h_1(k) * h_2(k)$

$= 2\cos(k\pi) * [a^k \varepsilon(k)] * [\delta(k) - a\delta(k-1)]$

$= 2\cos(k\pi) * [a^k \varepsilon(k) - a^k \varepsilon(k-1)]$

$= 2\cos(k\pi) * \delta(k)$

$= 2\cos(k\pi)$

作业：

3.11(1)、3.17

THANKS