第六章 模态逻辑初步

参考文献

- 周北海《模态逻辑导论》
- 北京大学出版社 1997

要点

- 模态方阵
- 模态逻辑语形学
- 模态逻辑语义学

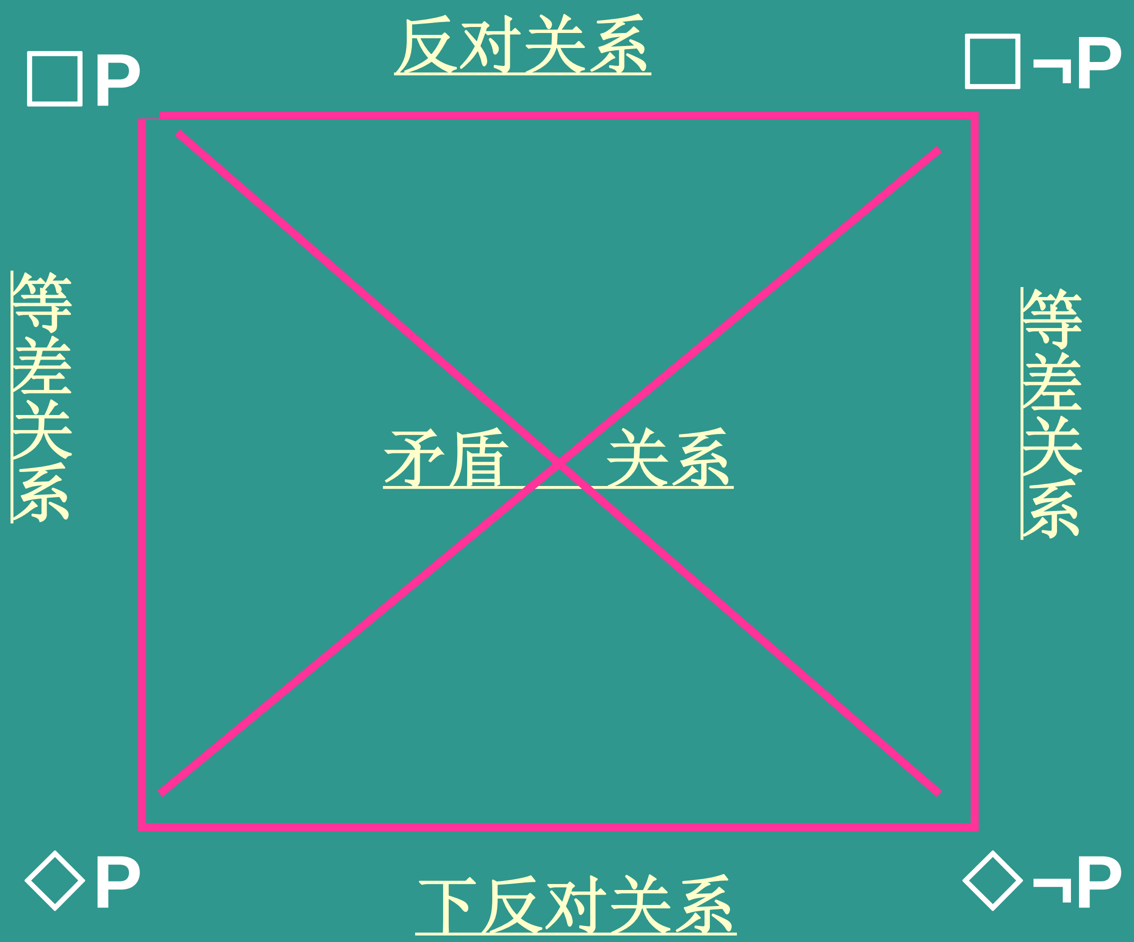
1. 模态方阵

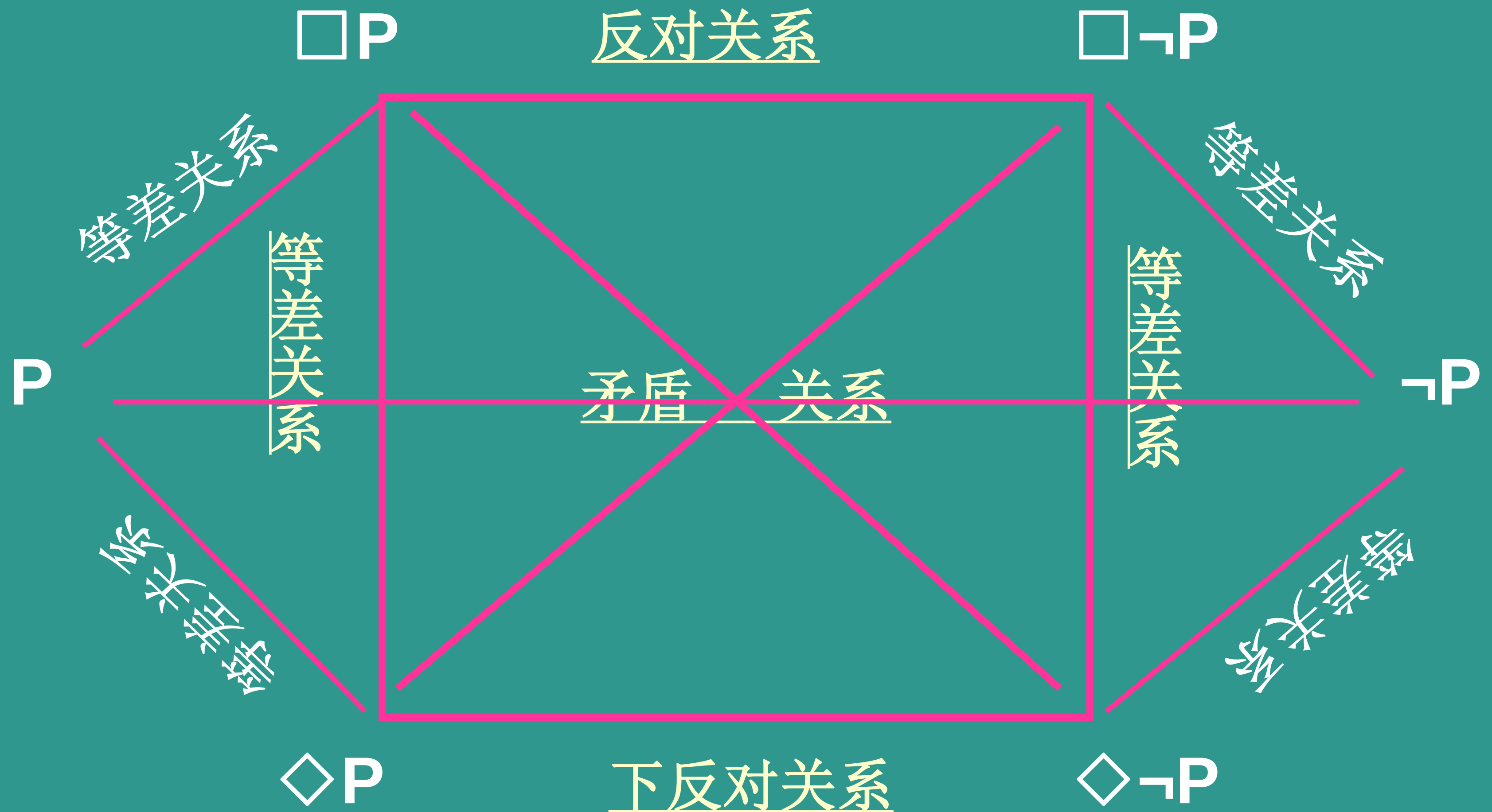
模态命题

1. 明天可能有海战。
2. 他不可能被推举为我们学校的校长。
3. 这是必然的，穷人会越来越穷，富人则越来越富。

运动促进健康是必然的。	□P
运动不促进健康是必然的。	□¬P
运动促进健康不是必然的。	¬□P
运动不促进健康不是必然的。	¬□¬P
运动促进健康是可能的。	◇P
运动不促进健康是可能的。	◇¬P
运动促进健康不是可能的。	¬◇P
运动不促进健康不是可能的。	¬◇¬P

亚里士多德模态方阵




□P
反对关系
□¬P
等差关系
等差关系
P
矛盾 关系
¬P
等差关系
等差关系
等差关系
等差关系
◇P
下反对关系
◇¬P

模态命题之间的关系

- $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$
- $\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$

□和◇可以相互定义，所以在□和◇中只要任取一个，另一个便可通过定义得到。

2. 模态逻辑语形学

模态逻辑的语言

- 模态命题逻辑（ML）的语言是经典命题逻辑CL语言的扩展。
- 由命题变元，命题联结词，模态算子这三类语言要素构成，另外加上模态公式的形成规则。

基本符号

- 命题变元：p，q，r…，它们代表不可分解的命题
- 命题联结词：CL语言的命题联结词都是ML语言的命题联结词，它们分别是一元联结词¬和二元联结词∧，∨，→，和↔
- 模态运算子：□，◇

模态命题公式的形成规则

- **CL语言的扩展。**

1. 任一命题变元是公式；
2. 如果p是公式，则¬p是公式；
3. 如果p，q是公式，并且设•为二元联结词，则p•q也是公式；
4. 如果p是公式，则□p，◇p也是公式。

模态命题逻辑的推理规则

1. CL中的分离规则MP
2. 严格等值置换规则SEQ
3. 必然规则：若断定公式p，可断定□p

模态命题逻辑公理

1. CL中的所有公理
2. 依据不同的给定公理，形成不同的模态命题逻辑

K系统

- **ML形式语言**

1. 经典命题逻辑CL语言+◇=ML语言
2. 初始符号：¬，∧，◇，
3. 依据初始符号定义的符号：∨，→，↔，T，⊥
4. □=df ¬◇¬p

- **公理**

1. 经典命题逻辑CL的公理
2. K公理：□（p→q）→（□p→□q）

- **推理规则**

1. 分离规则
2. 一致性替换规则
3. 必然规则：断定公式p，可断定□p

广义模态

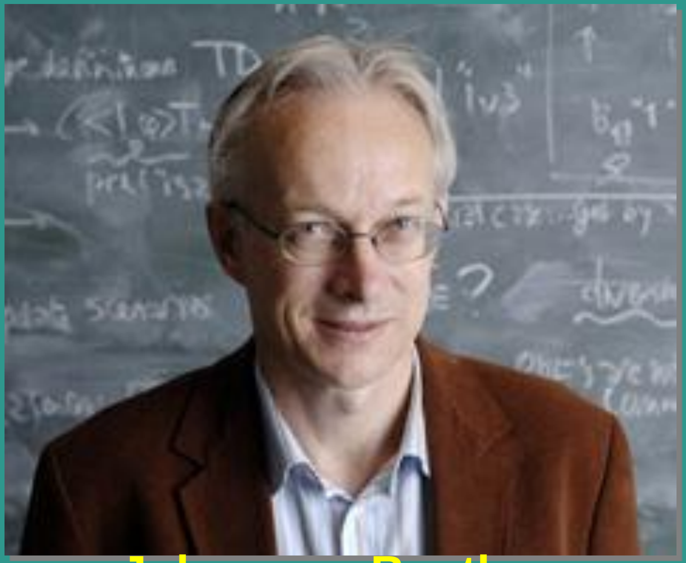
- 将模态逻辑与模态算子进行推广：
- 道义逻辑：应该（O）、允许（P）
- 认知逻辑：知道（K）
  相信（B）
- 时态逻辑：过去一直（H）、曾经（P）
  将来一直（G）、将会（F）

知道逻辑——引入模态算子“K”

- 知道逻辑特征公理：
- K：$Ka(p\rightarrow q)\wedge Ka(p)\rightarrow Ka(q)$
  若a知道p→q与p，则a知道q
- T：$Ka(p)\rightarrow p$
  若a知道p，则p为真
- D：$\neg Ka(p\wedge\neg p)$
  认知主体不知道相互矛盾的事，即
  相互矛盾的事在认知主体那里不真
- 4：$Ka(p)\rightarrow KaKa(p)$ *<u>正反省公理</u>*
  若a知道p，则他知道他知道p
- E：$\neg Ka(p)\rightarrow Ka(\neg Ka(p))$ *<u>负反省公理</u>*
  若a不知道p，则他知道他不知道p

动态认知逻辑

- Dynamic Epistemic Logic
- Springer, 2008



Johan van Benthem

3. 模态逻辑语义学

可能世界

- 一个世界是可能的，当且仅当不包含逻辑矛盾。
- 可能世界有无限多个。
- 我们生活在其中的现实世界是所有可能世界中最好的世界。

Leibniz，1646-1716

可能世界

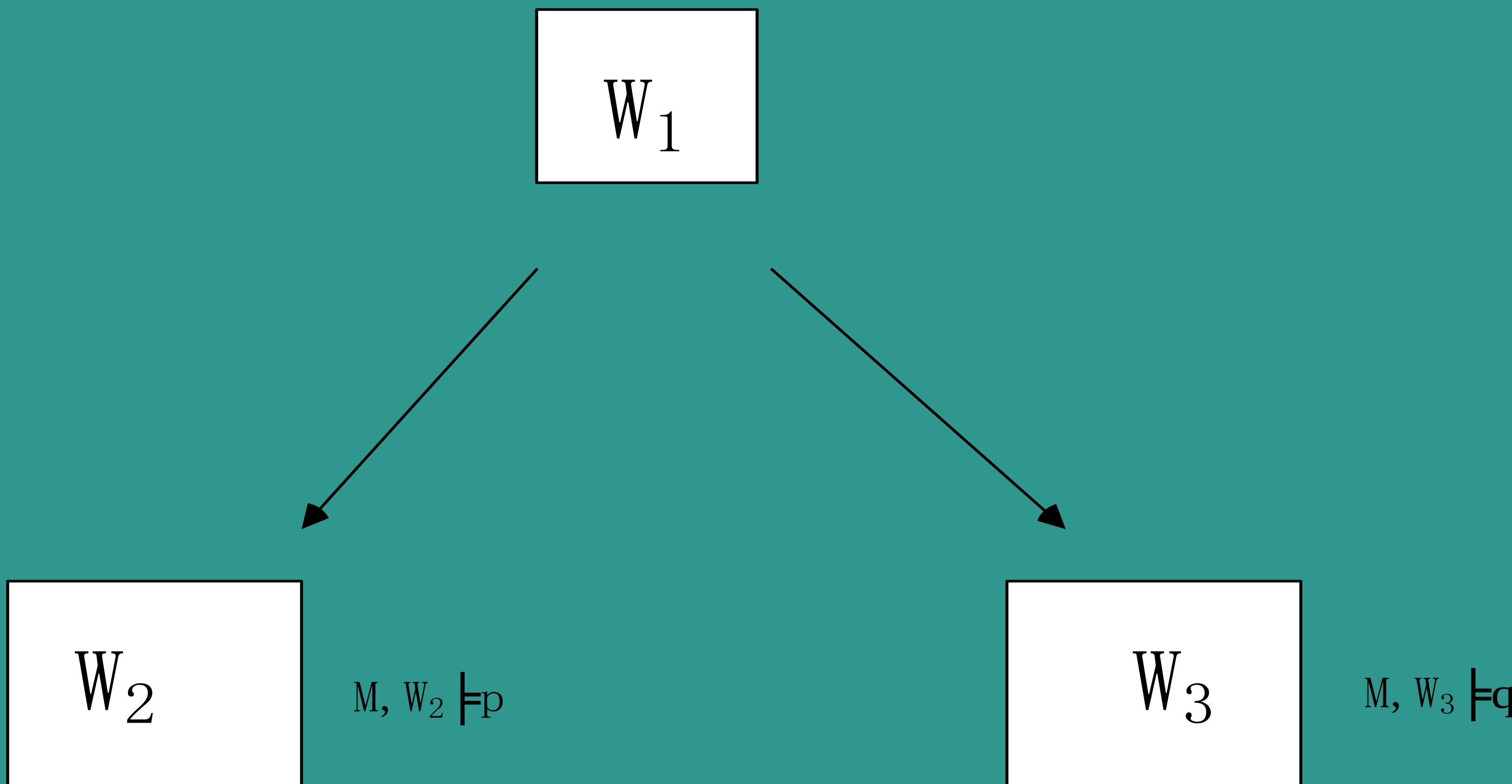
- *可能世界恰恰就是我们在学校所学的那个概率的微型世界的扩充——，可能世界完全是世界可能会采取的各种方式，或者是整个世界的状态或者历史。（克里普克）*
- 可能世界是事物或对象的各种可能状态。

可能与必然

- 定义1：□A是真的，当且仅当，A在每一个可能世界中都是真的。
- 定义2：◇A是真的，当且仅当，A在某个或某些可能世界中是真的。

模型真图表表示法

■一个三可能世界成员的模型M图：



图表说明

1. w_1，w_2，w_3是M中的可能世界成员。
2. 图中箭头表示w_1可通达w_2，w_3，即w_1Rw_2，w_1Rw_3；w_2和w_3之间没有可通达关系。
3. w_2和w_3旁的符号表明：命题p在模型M中的w_2为真；命题q在模型M中的w_3为真。

几个结论

- 因为$M,w_2 \models p$，所以有$M,w_2 \models p \vee q$
- 因为$M,w_3 \models q$，所以有$M,w_3 \models p \vee q$
- 因为从w_1可通达的所有可能世界都有$p \vee q$为真，所以有$M,w_1 \models \Box (p \vee q)$