第五章 谓词逻辑

命题逻辑、词项逻辑的局限性

- 命题逻辑刻画复合命题的逻辑性质及其推理关系。
- 词项逻辑刻画直言命题的逻辑性质及其推理关系。
- 它们有很强的处理推理的能力，都能够对相应范围的推理的有效性进行判别。
- 它们有局限性。

局限1

1. 2小于3，3小于4，所以，2小于4。
2. 有的投票人赞成所有的候选人，所以，所有的候选人都有人赞成。

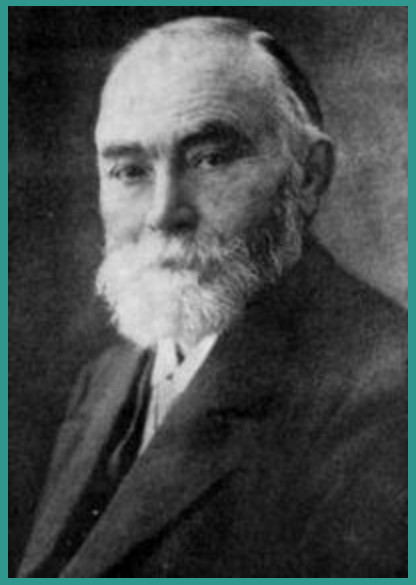
结论：不能处理关系命题及其推理

局限2

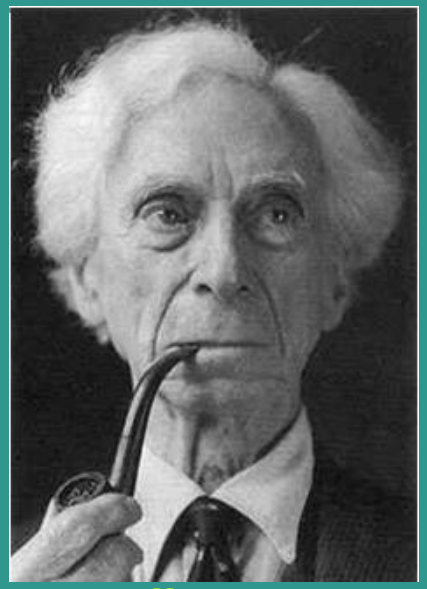
- 任一自然数，如果它能够被2整除，则它是偶数；如果它不能被2整除，则它不是偶数。有的自然数不能被2整除，所以，有的自然数不是偶数。
- 结论：不能处理量词内部含联结词结构的命题及其推理。

谓词逻辑的创立

- 谓词逻辑开山人：[德]弗雷格《概念文字》
- 现代逻辑诞生标志：[英]怀特海与罗素合著《数学原理》



Frege，1848-1925



Russell，1872-1970

谓词逻辑

- 谓词逻辑是当今逻辑学的基础和主流。
- 统一处理命题逻辑和词项逻辑中的推理。

要点

- 谓词语言
- 模型与指派
- 恒真式及其判定
- 谓词演算

1. 谓词语言

学习目标

- 谓词语言的创设与某些数学哲学思想相关。
- 理解符号的组合过程，了解语言设计思想。
- 体会熟知的概念一旦进行跨学科的应用就会产生意想不到的结果。
- 比较逻辑公式与代数公式的相似之处，把函数“空位”被填充的思想容入到命题的分析。

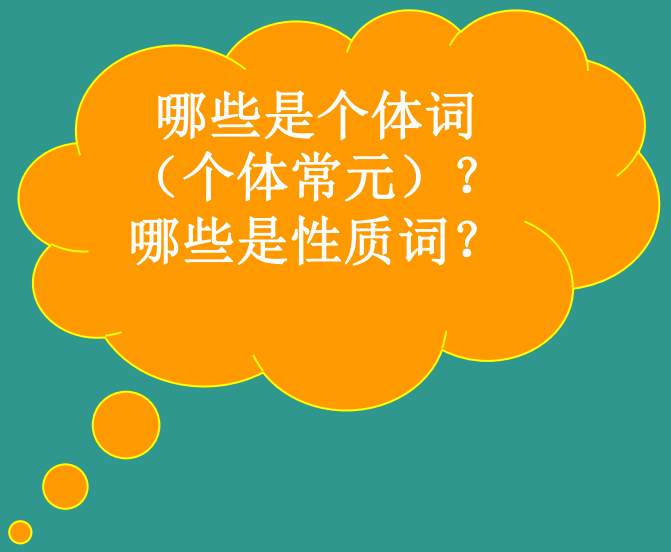
命题结构分析

- 单称命题
- 关系命题
- 全称命题
- 特称命题
- 复杂命题

单称命题

- 谓述一个个体对象具有或不具有某种性质的命题。
- 例：

1. 苏格拉底是聪明的。
2. 1不是偶数。



单称命题结构分析

1. 苏格拉底是聪明的。
- 结构：“苏格拉底” + “…是聪明的”
- 引入符号：*s*、*B*(…)
- 分析结果：*B*(s)

2. 1不是偶数
- 结构：并非“1是偶数”
  “1是偶数”：“1” + “…是偶数”
- 引入符号：l、*E*(…)
- 分析结果：¬*E*(l)

说明

- 构成：“是”与性质词形成带有一个空位的成分，再由个体常元填充构成一个整体。
- 体会饱和和空位的思想。

关系命题

- 谓述个体对象之间具有或不具有某种关系的命题。
- 例：

1. 苏格拉底喜欢柏拉图。
2. 1不小于0。

关系命题结构分析

1. 苏格拉底喜欢柏拉图。
- 结构：“苏格拉底” + “…喜欢…” + “柏拉图”
- 引入符号：*s*、*L*(…, …)、*p*
- 分析结果：*L* (s, p)

2. 1不小于0
- 结构：并非“1小于0”，
  “1小于0”：“1” + “…小于…” + “0”
- 引入符号：*l*、*S*(…,…)、*o*
- 分析结果：¬*S*(*l*,*o*)

说明

- 关系命题是个体常元与关系词的复合体。
- 关系词在语句中带有两个空位，个体常元则是饱和的。
- 个体常元与关系词的复合体本质上就是用饱和的个体常元按照一定顺序依次填充到关系词的两个空位上构成的一个整体。
- “空位”思想的引入是构成复合体的关键。

“空位”思想

- 函数中的“空位” 思想：函数的自变量相当于函数的空位，自变量取定一个数值则相当于函数的空位被数值填充，最后函数值就相当于数值填充到空位所得的结果。

- 函数中的自变量　　个体常元\变元
- 函数中的因变量(函数值)　性质词\关系词

- 类似于函数中有n个自变量称n元函数，称性质词是一元的，关系词带n个空位称n元的。

- 思想源：德国逻辑学家弗雷格

  《函数和概念》，《论概念和对象》

全称命题结构分析

1. 所有的哲学家都是聪明的。
- 分析：“任意*x*，如果*x*是哲学家，那么*x*是聪明的”
- 引入符号：∀*x*表示“任意*x*”，*P*(…)表示“…是哲学家”，*S*(…)表示“…是聪明的”
- 分析结果：$\forall x\,(P(x)\rightarrow S(x))$

2. 任意偶数都不是奇数。
- 结构：“任意*x*，如果*x*是偶数，那么*x*不是奇数”
- 引入符号：*E*(…)表示“…是偶数”，*O*(…)表示“…是奇数”
- 分析结果：$\forall x\,(E(x)\rightarrow \neg O(x))$

说明

- 引入两个语言成分：全称量词∀，个体变元，如x。
- 全称量词类似词项逻辑中的全称量项
- 个体变元，代指个体对象，类似代数中的变量。
- 个体变元常用x、y、z等表示。

特称命题结构分析

1. 有的哲学家是数学家。
- 结构：“存在*x*，*x*是哲学家，并且*x*是数学家”
- 引入符号：∃*x*表示“存在*x*”， *P*(…) 表示“…是哲学家”，*M*(…)表示“…是数学家”
- 分析结果： $\exists x\,(P(x) \wedge M(x))$

2. 有的奇数不是质数。
- 结构：“存在*x*，*x*是奇数，并且*x*不是质数”
- 引入符号：*O*(…)表示“…是奇数”，*N*(…)表示“…是质数”
- 分析结果： $\exists x\,(P(x) \wedge \neg M(x))$

说明

- 引入语言成分：存在量词∃。
- 在全称命题中两个带有空位的单称命题用联结词“如果…，那么…”联结。
- 在特称命题中两个带有空位的单称命题用联结词“…并且…”联结。
- 比较：词项逻辑把单称命题视作全称命题，谓词逻辑分析结果表明全称命题的结构完全不同于单称命题。

直言命题的谓词逻辑表达形式

SAP	$\forall x\,(S(x)\rightarrow P(x))$
SEP	$\forall x\,(S(x)\rightarrow\neg P(x))$
SIP	$\exists x\,(S(x)\wedge P(x))$
SOP	$\exists x\,(S(x)\wedge\neg P(x))$
SaP	$P(a)$
SeP	$\neg P(e)$

三段论的谓词逻辑表达形式

苏格拉底是人， 人都是会死的， 所以，苏格拉底是会死的。	P(c) $\forall x\,(P(x)\rightarrow M(x))$ M(c)

复杂命题的分析与表达

组1

1. 每个哲学家都喜欢苏格拉底。

   任意*x*，如果*x*是哲学家，那么*x*喜欢苏格拉底。

   $$\forall x(P(x) \rightarrow L(x,s))$$

2. 每个哲学家都喜欢数学家。

   任意*x*，如果*x*是哲学家，那么*x*喜欢数学家。

   任意*y*，如果*y*是数学家，那么*x*喜欢*y*。

   $$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(M(y) \rightarrow L(x,y)))$$

组2

1. 每个哲学家都喜欢某个数学家。

   任意*x*，如果*x*是哲学家，那么*x*喜欢某个数学家

   存在*y*，*y*是数学家，并且*x*喜欢*y*

   $$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$$

2. 有个数学家，每个哲学家都喜欢他。

   存在*x*，*x*是数学家，并且每个哲学家都喜欢*x*

   任意*y*，如果*y*是哲学家，那么*y*喜欢*x*

   $$\exists x(M(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow L(y,x)))$$

组3

1. 苏格拉底喜欢某个数学家。

   存在*x*，*x*是数学家，并且苏格拉底喜欢*x*

   $$\exists x(M(x) \wedge L(s,x))$$

2. 苏格拉底只喜欢某个数学家。

   存在*x*，*x*是数学家，并且苏格拉底只喜欢*x*

   苏格拉底喜欢*x*，并且任意*y*，如果*y*是数学家并且苏格拉底喜欢*y*，那么*y*等于*x*

   $$\exists x(M(x) \wedge L(s,x) \wedge \forall y(M(y) \wedge L(s,y) \rightarrow y \equiv x)))$$

组4

1. 某个哲学家喜欢所有那些不喜欢数学家的哲学家。

存在*x*，*x*是哲学家，并且*x*喜欢所有那些不喜欢数学家的哲学家

任意*y*，如果*y*是哲学家并且*y*不喜欢数学家，那么*x*喜欢*y*

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\wedge\forall z(M(z)\rightarrow\neg L(y,z))\rightarrow L(x,y)))$$

2. 每个哲学家都不喜欢某个喜欢数学家的哲学家。

任意*x*，如果*x*是哲学家，那么*x*不喜欢某个喜欢数学家的哲学家

存在*y*，*y*是哲学家，*y*喜欢数学家，并且*x*不喜欢*y*

$$\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(P(y)\wedge\forall z(M(z)\rightarrow L(y,z))\wedge\neg L(x,y)))$$

小结

- 递归生成的思想：不论命题的形式有多复杂，都可逐层进行分析，直到命题完全被分解为关系命题或单称命题的复合体为止。
- 逻辑分析与语言分析的差异：命题所显示的逻辑结构越精细，在语言形式上差别不大的两个命题所具有的逻辑形式可能有极大的差别。

谓词语言

- 一个谓词语言含以下六类初始符号：

1. x, y, z, 或这些字母加下标，例如x_1，x_2，y_3，z_9等等（称为“个体变元”）
2. ¬、∨、∧、→、↔（“联接词”）
3. ∀, ∃（∀表示全称量词，读作“任意”，∃表示特称量词，读作“存在”）
4.), (（“括弧”）
5. 某些表示性质词和关系词的符号（仍称为性质词和关系词，统称为“谓词”）
6. 某些表示个体词的符号（称为“个体常元”）

说明

- 前四类符号是所有谓词语言都共有的，称为逻辑符号（括号又称辅助符号）。
- 后两类符号称为是非逻辑符号，决定了某个谓词语言的特殊性，因而可以只指明这两类符号来明确一个谓词语言。

例

1. 有关苏格拉底、哲学家的命题，对应这样一个谓词语言，其中一元谓词：*P*、*M*；二元谓词：*L*、≡；个体常元*s*、*p*，此外无其它非逻辑符号。
2. 有关数的那些命题，对应这样一个谓词语言，其中一元谓词：*E*、*O*、*N*；二元谓词：*S*；个体常元*o*、*I*，此外无其它非逻辑符号。

- 这是两个不同的谓词语言，分别用于分析不同性质的命题。

公式的定义

1. 如果$t_1, t_2, \ldots, t_n$是个体变元或个体常元，P是该谓词语言中的n元谓词，那么$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是公式（特别地，对二元谓词≡，$t_1 \equiv t_2$是公式），

素公式

4. 如果A是公式，那么对任何个体变元x，$\forall xA$、$\exists xB$也是。

说明

- 上述定义采用了递归生成的思想，脱离开命题的背景直接给出所有可能的命题的逻辑形式。

- 逻辑学中的公式正是模仿代数学中的公式而设立的，其中的关键在于公式中最基本的“句型”是单称肯定命题和关系肯定命题的逻辑形式，它们正好是代数中函数表达式的一般化。

对象语言 VS. 元语言

- 对象语言：被研究的谓词语言。
- 元语言：用来言说对象语言的语言。

公式形成规则

1. 如果$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$是个体变元或常元，P是该谓词语言中的n元谓词，那么$P(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$是公式；
2. 如果α是公式，那么$\neg\alpha$也是；
3. 如果α和β是公式，那么$(\alpha\theta\beta)$也是,其中$\theta\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$。
4. 如果α是公式，那么对任何个体变元x，$\forall x\alpha$、$\exists x\alpha$也都是。

练习

- 判断在谓词语言（P^1, R^2, c）中，以下符号串是否公式，哪些是素公式：

1. $P(x)$、$P(c)$、$R(c, c)$、 $\forall xP(x)$、$\exists xP(c)$
2. $\neg R(c, c)$、$(P(x_1) \wedge \neg R(c, c))$，

   $(\neg\neg R(c, c) \rightarrow (P(x_1) \wedge P(c)))$
3. $\exists x\forall xP(x)$、$(\exists x\forall xP(x) \leftrightarrow \forall xP(x))$

构造一个谓词语言（P, L, t, m）

- t、m是个体常元，分别表示“汤姆”和“玛丽”
- P是一元谓词，表示“人”
- L为二元谓词，表示“…爱…”，L(x, y)表示“x爱y”

例

1. 汤姆爱玛丽，但玛丽不爱汤姆。
2. 每个人都爱玛丽。
3. 每个人都爱某个人。
4. 有某个人为每个人所爱。
5. 不是每个人都爱那些爱他的人，也不是每个人都不爱那些不爱他的人。

1、汤姆爱玛丽，但玛丽不爱汤姆。

$L(t, m) \wedge \neg L(m, t)$

2、每个人都爱玛丽。

$\forall x(P(x) \rightarrow L(x, m))$

3、每个人都爱某个人。

$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge L(x, y))$

4、有某个人为每个人所爱。

$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow L(y, x))$

5、不是每个人都爱那些爱他的人，也不是每个人都不爱那些不爱他的人。

$\neg\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(P(y) \wedge L(y, x) \rightarrow L(x, y)) \wedge$

$\neg\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(P(y) \wedge \neg L(y, x) \rightarrow \neg L(x, y))$

等词

- 汤姆只爱玛丽。
- → “汤姆爱玛丽，并且对任何对象x，如果汤姆爱x，那么x就是玛丽”
- → “汤姆爱玛丽，并且对任何对象x，如果汤姆爱x，那么x等同玛丽”。
- → $L(t, m) \wedge \forall x(L(t, x) \rightarrow x \equiv m)$。

练习

- 牛郎不爱有些爱织女的男人。

→ 存在x，使得x是男人，并且x爱a（织女），但b（牛郎）不爱x。

$\exists x\,(M(x) \wedge L(x,a) \wedge \neg L(b,x))$

- 织女爱每个爱牛郎的人。

→ 对于任意x，如果x是人，并且x爱b（牛郎），则a（织女）爱x。

$\forall x\,(P(x) \wedge L(x, b) \rightarrow L(a,x))$