



管理运筹学

# 第十五章 对策论

北京理工大学 钟华 副教授



## 第十五章

# 对策论

### 由“齐王赛马”引入

战国时期，有一次齐王要与他的大将田忌赛马，双方约定，比赛三局，每局各出赛马一匹，负者要付胜者千金，双方都有上中下三个等级的马，已知在同等级的马中，田忌的马不如齐王的马，但如果田忌的马比齐王的马高一等级，则田忌的马就能取胜，如果田忌与齐王同等级的马比赛，则田忌要连输三局而输掉三千金，当时田忌手下的一位谋士出了一个好对策，每局比赛时先让齐王牵出他的马，然后用下马对齐王的上马，用中马对齐王的下马，以上马对齐王的中马，结果田忌二胜一负，得了千金。



# 本章内容



1

对策论的基本概念

2

矩阵对策的最优纯策略

3

矩阵对策的混合策略

4

其他类型的对策论简介

# 本章内容



1

对策论的基本概念

2

矩阵对策的最优纯策略

3

矩阵对策的混合策略

4

其他类型的对策论简介



## § 1

# 对策论的基本概念

对策模型的三个基本要素：

1. 局中人：参与对抗的各方；
2. 策略集：可供局中人选择对付其他局中人的行动方案称为一个**策略**；把一个局中人拥有的策略全体称为该局中人的**策略集**；
3. 一局势对策的益损值：各局中人使用一定的对策时就形成了一个**局势**，一个局势决定了各局中人的对策的结果（量化）也称为对策的**益损值**。



# § 1

## 对策论的基本概念

“齐王赛马”齐王在各局势中的益损值表（单位：千金）

齐王损 益值		S2	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
			(上.中.下)	(上.中.下)	(上.中.下)	(上.中.下)	(上.中.下)	(上.中.下)
S1	$\alpha_1$ (上.中.下)	3	1	1	1	-1	1	
	$\alpha_2$ (上.中.下)	1	3	1	1	1	-1	
	$\alpha_3$ (上.中.下)	1	-1	3	1	1	1	
	$\alpha_4$ (上.中.下)	-1	1	1	3	1	1	
	$\alpha_5$ (上.中.下)	1	1	1	-1	3	1	
	$\alpha_6$ (上.中.下)	1	1	-1	1	1	3	



## § 1

# 对策论的基本概念

齐王的策略集： $S_1 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \}$

田忌的策略集： $S_2 = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6 \}$

齐王的赢得矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



## § 1

# 对策论的基本概念

二人有限零和对策（矩阵策略）：

1. 局中人为2；
2. 每个局中人的策略集的策略数目都是有限的；
3. 每一局势的对策均有确定的损益值，并且对同一局势的两个局中人的益损值之和为零。

“齐王赛马”是一个矩阵策略。

本章研究的对策论模型仅限于矩阵对策

通常将矩阵对策记为：

$$G = \{S_1, S_2, A\}$$

$S_1$ ：甲的策略集；  $S_2$ ：乙的策略集；  $A$ ：甲的赢得矩阵。

# 本章内容



1

对策论的基本概念

2

矩阵对策的最优纯策略

3

矩阵对策的混合策略

4

其他类型的对策论简介



## § 2

# 矩阵对策的最优纯策略

对矩阵对策模型：

只要确定甲方赢得矩阵，就确定了矩阵对策模型

在甲方的赢得矩阵： $A=[a_{ij}]_{m \times n}$

$i$  行代表甲方策略  $i=1, 2, \dots, m$ ;

$j$  列代表乙方策略  $j=1, 2, \dots, n$ ;

$a_{ij}$  代表甲方取策略  $i$ ，乙方取策略  $j$ ，这一局势下甲方的益损值（乙方的益损值为  $-a_{ij}$ ）。

**注：**在考虑各方采用的策略时，必须注意一个前提，就是双方都是**理智的**，即双方都是从各自可能出现的最不利的情形选择一种最为有利的情况作为决策的依据。



## § 2

# 矩阵对策的最优纯策略

例1：甲乙乒乓球队进行团体对抗赛，每队由三名球员组成，双方都可排成三种不同的阵容，每一种阵容可以看作一种策略，双方各选一种策略参赛。

比赛共赛三局，规定每局胜者得1分，输者得-1分，可知三赛三胜得3分，三赛二胜得1分，三赛一胜得-1分，三赛三负得-3分。甲队的策略集为 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ，乙队的策略集为 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。根据以往比赛得分资料，有甲队的赢得矩阵为A，如下所示：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

问：这次比赛各队采用哪种阵容上场最为稳妥？



## § 2

# 矩阵对策的最优纯策略

根据理智行为，矩阵A每行的最小元素分别为1，-3，-1。

在这些最少赢得中最好的结果是1，故甲队会采取策略 $\alpha_1$ ，无论对手采取何策略，甲队至少得1分。

对于乙队， $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 可能带来的最少赢得，即A中每列的最大元素，分别为3，1，3。乙队会采取 $\beta_2$ 策略，确保甲队不会超过1分。

$\alpha_1$ 和 $\beta_2$ 分别称为局中人甲队、乙队的**最优策略**。



## § 2

# 矩阵对策的最优纯策略

由于双方必然选择这一种策略，所以，这种策略又称为**最优纯策略**。

这种最优纯策略只有当赢得矩阵 $A = (a_{ij})$ 中等式

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

成立时，双方才有最优纯策略，并把 $(\alpha_1, \beta_2)$ 称为对策G在纯策略下的解，又称 $(\alpha_1, \beta_2)$ 为对策G的**鞍点**。

把其值  $V$  称之为对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$  的值。



## § 2

# 矩阵对策的最优纯策略

例2 某单位采购员在秋天决定冬季取暖用煤的储量问题，已知在正常的冬季气温条件下要消耗15吨煤，在较暖和较冷的天气下要消耗10吨和20吨。假定冬天的煤价随天气寒冷程度而有所变化，在较暖和、正常、较冷的气候条件下每吨煤价分别为10元、15元、20元。又设秋季时煤价为每吨10元。在没有关于当年冬季准确的气象预报的条件下，秋季储煤多少吨能使得单位的支出量最少？

解：局中人I为采购员，局中人II为大自然；

采购员有三个策略，在秋季买10吨、15吨、20吨，分别记为 $\alpha_1$ ， $\alpha_2$ ， $\alpha_3$ 。

大自然也有三个策略：冬季气候较暖、正常、较冷，分别记为 $\beta_1$ ， $\beta_2$ ， $\beta_3$ 。



## § 2

# 矩阵对策的最优纯策略

局中人I的赢得矩阵如下：

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\alpha_1$ (10吨)	-100	-175	-300
$\alpha_2$ (15吨)	-150	-150	-250
$\alpha_3$ (20吨)	-200	-200	-200

在此表上计算，有

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	min
$\alpha_1$ (10吨)	-100	-175	-300	-300
$\alpha_2$ (15吨)	-150	-150	-250	-250
$\alpha_3$ (20吨)	-200	-200	-200	-200*
max	-100	-150	-200*	

故  $(\alpha_3, \beta_3)$  为对策G的解， $V_G = -200$ 。

# 本章内容



1

对策论的基本概念

2

矩阵对策的最优纯策略

3

矩阵对策的混合策略

4

其他类型的对策论简介

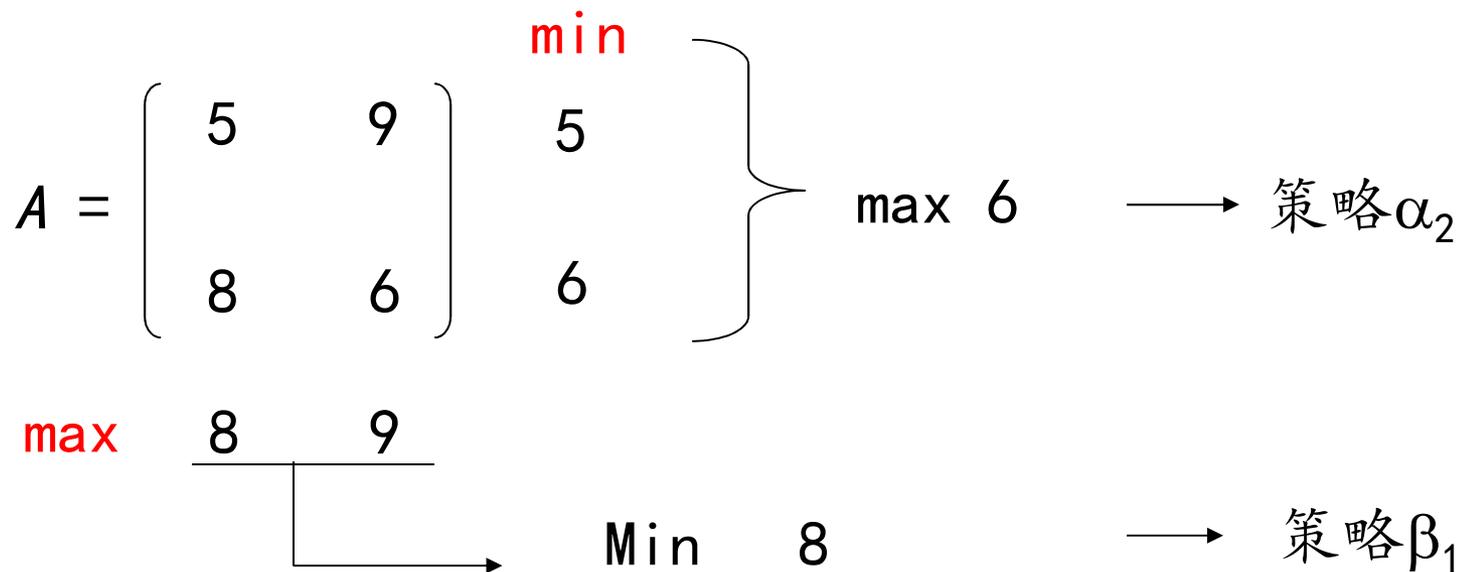


### § 3

## 矩阵对策的混合策略

矩阵对策  $G = \{ S_1, S_2, A \}$ 。当  $\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$  时，可否按照从最不利情况中选取最有利的结果的原则来选择最优纯策略？

例：设一个赢得矩阵如下：





### § 3

## 矩阵对策的混合策略

当甲取策略 $\alpha_2$ ，乙取策略 $\beta_1$ 时，甲实际赢得8比预期的多2，乙当然不满意。

$\beta_1$ 不是最优，乙采取策略 $\beta_2$ ，此时乙损失为6比其预期的损失要少，对甲不利，甲也会考虑取策略 $\alpha_1$ 。

作为乙就要考虑用 $\beta_1$ 对付 $\alpha_1$ 。

由此，甲乙出 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的可能性和乙出 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 的可能性都不能排除。



## § 3

# 矩阵对策的混合策略

此时，对两个局中人甲、乙来说，没有一个双方均可接受的平衡局势，其主要原因是甲和乙没有执行上述原则的共同基础，即

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$$

一个自然的想法：对甲（乙）给出一个选取不同策略的概率分布，以使甲（乙）在各种情况下的平均赢得（损失）最多（最少）——即混合策略。

求解混合策略的问题有图解法、迭代法、线性方程法和线性规划法等，我们这里只介绍**线性规划法**，其他方法略。



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

例1:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

设甲使用策略 $\alpha_1$ 的概率为 $X_1'$ ，使用策略 $\alpha_2$ 的概率为 $X_2'$ ，并设在最坏的情况下，甲赢得的平均值为 $V$ （未知），建立数学关系：

- 1)  $X_1' + X_2' = 1$  且  $X_1', X_2' \geq 0$
- 2) 无论乙取何策略，甲的平均赢得应不少于 $V$ :

$$\text{对乙取}\beta_1: \quad 5X_1' + 8X_2' \geq V$$

$$\text{对乙取}\beta_2: \quad 9X_1' + 6X_2' \geq V$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

由于 $V$ 的值与赢得矩阵 $A$ 的各元素的值是有关的，本例中由于 $A$ 各元素为正，因此 $V > 0$ 。

下面进行变量替换：

$$X_1 = X_1' / V ; \quad X_2 = X_2' / V$$

得到上述关系式变为：

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 = 1/V \quad (\text{对甲而言} V \text{愈大愈好}) \\ 5X_1 + 8X_2 \geq 1 \\ 9X_1 + 6X_2 \geq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

建立求甲的最优混合策略的线性规划模型：

$$\begin{array}{ll} \min & X_1 + X_2 \\ \text{s. t.} & \begin{cases} 5X_1 + 8X_2 \geq 1 \\ 9X_1 + 6X_2 \geq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

管理运筹学软件求解得： $X_1 = 0.048$ ； $X_2 = 0.095$ ； $V = 6.993$

返回原问题： $X_1' = X_1 V = 0.336$

$X_2' = X_2 V = 0.664$

于是，甲的最优混合策略为：

以0.336的概率选 $\alpha_1$ ，以0.664的概率选 $\alpha_2$ ，最优值 $V = 6.993$ 。



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

同样可求乙的最优混合策略：

$$\text{设乙使用策略}\beta_1\text{的概率为}Y_1' \quad Y_1' + Y_2' = 1$$

$$\text{设乙使用策略}\beta_2\text{的概率为}Y_2' \quad Y_1', Y_2' \geq 0$$

设在最坏的情况下，甲赢得的平均值为 $V$ 。这也是乙损失的平均值，越小越好。

$$\text{作变换：} \quad Y_1 = Y_1' / V, \quad Y_2 = Y_2' / V$$

建立线性模型：

$$\begin{aligned} & \max \quad Y_1 + Y_2 \\ & \text{s. t.} \quad \begin{cases} 5Y_1 + 9Y_2 \leq 1 \\ 8Y_1 + 6Y_2 \leq 1 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} Y_1 = 0.0715 \\ Y_2 = 0.0715 \\ V = 6.993 \end{cases}$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

返回原问题:  $Y_1' = Y_1 V = 0.5$

$$Y_2' = Y_2 V = 0.5$$

于是, 乙的最优混合策略为:

以 0.5 的概率选  $\beta_1$ ; 以 0.5 的概率选  $\beta_2$ , 最优值  $V=6.993$ 。

### 当赢得矩阵中有非正元素时?

此时,  $V>0$  的条件不一定成立

可以作下列变换: 选一正数  $k$ , 令矩阵中每一元素加上  $k$  得到新的正矩阵  $A'$ , 其对应的矩阵对策

$$G' = \{ S_1, S_2, A' \} \quad \text{与} \quad G = \{ S_1, S_2, A \}$$

解相同, 但  $V_G = V_{G'} - k$ 。



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

例2: 求解“齐王赛马”问题。

已知齐王的赢得矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\max_i \min_j a_{ij} = -1 \neq \min_j \max_i a_{ij} = 3$  故不存在纯策略问题下的解

求其混合策略, 但, A中有负元素, 可以取 $k=2$ , 在A的每个元素上加2得到A' 如下:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

建立对  $G' = \{S_1, S_2, A'\}$  中求甲方最佳策略的线性规划如下：

目标函数：

$$\text{Min } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

约束条件：

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 \geq 1$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 \geq 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 \geq 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 3x_6 \geq 1$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 5x_6 \geq 1$$

$$x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 6$$

可解得解为： $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ ， $x_2 = x_3 = x_6 = 0.111$ ， $v' = 3$ ， $x_1' = x_4' = x_5' = 0$ ， $x_2' = x_3' = x_6' = 1/3$ ，即  $X'^* = (0, 1/3, 1/3, 0, 0, 1/3)^T$

甲的最优策略为作出策略  $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_6$  的概率都为 0.333，而作出  $\alpha_1$ 、 $\alpha_4$ 、 $\alpha_5$  的概率为 0，此时  $V'_G = V' = 3$ 。



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

同样，可建立对策  $G' = \{S_1, S_2, A'\}$  中求乙方最佳策略的线性规划如下：

目标函数：

$$\text{Max } y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$$

约束条件：

$$5y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 + y_5 + 3y_6 \leq 1$$

$$3y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 \leq 1$$

$$3y_1 + y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_6 \leq 1$$

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 5y_4 + 3y_5 + 3y_6 \leq 1$$

$$3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 + 5y_5 + 3y_6 \leq 1$$

$$3y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 5y_6 \leq 1$$

$$y_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 6$$

可解得： $y_1 = y_4 = y_5 = 0.111$ ， $y_2 = y_3 = y_6 = 0$ ， $v' = 3$ ， $y_1' = y_4' = y_5' = 1/3$ ， $y_2' = y_3' = y_6' = 0$ ，即  $Y'^* = (1/3, 0, 0, 1/3, 1/3, 0)^T$ 。

因此，田忌的最优混合策略为作出策略  $\beta_1$ 、 $\beta_4$ 、 $\beta_5$  的概率都为  $1/3$ ，而作出  $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 、 $\beta_6$  的概率为  $0$ ，此时  $V_G = V_G' - k = 1$ 。



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

例3 两个局中人进行对策，规则是两人互相独立地各自从1、2、3这三个数字中任意选写一个数字。如果两人所写的数字之和为偶数，则局中人乙支付给局中人甲以数量为此和数的报酬；如果两人所写数字之和为奇数，则局中人甲付给局中人乙以数量为此和数的报酬。试求出其最优策略。

解：首先计算局中人甲的赢得矩阵如下表：

甲的赢得 乙的策略 甲的策略	$\beta_1$ (出1)	$\beta_2$ (出2)	$\beta_3$ (出3)
$\alpha_1$ (出1)	2	-3	4
$\alpha_2$ (出2)	-3	4	-5
$\alpha_3$ (出3)	4	-5	6



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

甲的赢得矩阵为A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

此问题无纯策略意义的解，下面求其在混合策略下的解。

A的各元素都加上6，得到

$$A' = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

建立相应的两个互为对偶的线性规划模型如下：



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

$$\begin{aligned} & \text{Min } x_1+x_2+x_3 \\ \text{S. T. } & 8x_1+3x_2+10x_3 \geq 1 \\ & 3x_1+10x_2+x_3 \geq 1 \\ & 10x_1+x_2+12x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Max } y_1+y_2+y_3 \\ & 8y_1+3y_2+10y_3 \leq 1 \\ & 3y_1+10y_2+y_3 \leq 1 \\ & 10y_1+y_2+12y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

用管理运筹学软件，分别求解得到

$$\begin{aligned} x_1' &= 0.25, & x_2' &= 0.50, & x_3' &= 0.25; \\ y_1' &= 0.25, & y_2' &= 0.50, & y_3' &= 0.25. \end{aligned}$$

即此对策的解为

$$\begin{aligned} X^* &= (0.25, 0.50, 0.25)^T, \\ Y^* &= (0.25, 0.50, 0.25)^T. \\ V_G &= V_G' - k = 0. \end{aligned}$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

例4 甲乙两个企业生产同一种电子产品，为获得更多的市场销售份额，甲企业可以采取的策略措施有：(1)降低产品价格；(2)提高产品质量；(3)推出新产品。乙企业考虑采取的策略措施有(1)增加广告费用；(2)增设维修网点，加强售后服务；(3)改进产品性能。由于甲乙两个企业财力有限，都只能采取一个措施。假定这两个企业所占有的市场总份额一定，由于各自采取的措施不同，通过预测今后两个企业的市场占有率变动情况如下表，试求出这两个企业各自的最优策略。

甲的赢得 甲的策略	乙的策略		
	$\beta_1$ (措施1)	$\beta_2$ (措施2)	$\beta_3$ (措施3)
$\alpha_1$ (措施1)	10	-6	3
$\alpha_2$ (措施2)	8	5	-5
$\alpha_3$ (措施3)	-12	10	8



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

解： 易知此对策无纯策略意义下的解。

把A的每一个元素加上12，得到A'

$$A' = \begin{bmatrix} 22 & 6 & 15 \\ 20 & 17 & 7 \\ 0 & 22 & 20 \end{bmatrix}$$

建立相应的互为对偶的线性规划模型如下：

$$\begin{aligned} & \text{Min } x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t. } & 22x_1 + 20x_2 \geq 1 \\ & 6x_1 + 17x_2 + 22x_3 \geq 1 \\ & 15x_1 + 7x_2 + 20x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Max } y_1 + y_2 + y_3 \\ & 22y_1 + 6y_2 + 15y_3 \leq 1 \\ & 20y_1 + 17y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ & 22y_2 + 20y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

运用管理运筹学软件，求解得：

$$x_1=0.027, x_2=0.020, x_3=0.023;$$

$$y_1=0.0225, y_2=0.0225, y_3=0.025。 V=14.29。$$

计算得：

$$x_1' = 0.3858, x_2' = 0.2858, x_3' = 0.3287;$$

$$y_1' = 0.3215, y_2' = 0.3215, y_3' = 0.3573。$$

此对策的解为  $X^* = (0.3858, 0.2858, 0.3287)^T$

$$Y^* = (0.3215, 0.3215, 0.3573)^T。$$

$$V_G = V_G' - k = 2.29。$$



## § 3

# 矩阵对策的混合策略

### 优超原则

假设矩阵对策： $G = \{ S_1, S_2, A \}$

设甲方赢得矩阵为： $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

若存在两行  $s$  行与  $t$  行， $s$  行的各元素均优于  $t$  行的元素，即  $a_{sj} \geq a_{tj} \quad j=1, 2 \cdots n$ ，称甲方策略  $\alpha_s$  优超于  $\alpha_t$

若存在两列  $k$  列与  $l$  列， $k$  列的各元素均优于  $l$  列的元素，即  $a_{is} \leq a_{il} \quad i=1, 2 \cdots m$  称乙方策略  $\beta_s$  优超于  $\beta_t$



## § 3

# 矩阵对策的混合策略

优超原则：

当局中人甲方的策略 $\alpha_t$ 被其它策略所优超时，可在其赢得矩阵A中划去第t行（同理，当局中人乙方的策略 $\beta_t$ 被其它策略所优超时，可在矩阵A中划去第t列）。

如此得到阶数较小的赢得矩阵A'，其对应的矩阵对策

$$G' = \{ S_1, S_2, A' \} \text{ 与 } G = \{ S_1, S_2, A \}$$

等价，即解相同。



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

例5. 设对策问题局中人甲的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5.5 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

求此矩阵对策



# § 3

## 矩阵对策的混合策略

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5.5 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

← 被第4行所优越  
← 被第3行所优越

得到:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5.5 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

→ 被第1列所优越  
→ 被第2列所优越



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

得到:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 5.5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{被第1行所优超}$$

得到:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 5.5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{被第1列所优超}$$

最终得到:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$



### § 3

## 矩阵对策的混合策略

对 $A_4$ 计算，用线性规划方法得到：

(注意：余下的策略为 $\alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2$ )

$$\text{甲： } X^* = (0, 0, 0.067, 0.133, 0)^T \quad V=5$$

$$X^{*'} = (0, 0, 0.335, 0.665, 0)^T$$

$$\text{乙： } Y^* = (0.1, 0.1, 0, 0, 0)^T \quad V=5$$

$$Y^{*'} = (0.5, 0.5, 0, 0, 0)^T。$$

**注：**1. 利用优超原则化简赢得矩阵时，有可能将原对策问题的解也划去一些（多解情况）；

2. 线性规划求解时有可能是多解问题。

# 本章内容



1

对策论的基本概念

2

矩阵对策的最优纯策略

3

矩阵对策的混合策略

4

其他类型的对策论简介



## § 4

# 其他类型的对策论简介

对策问题通常分类的方式有：

- (1) 根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策；
- (2) 根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，可分为零和对策和非零和对策；
- (3) 根据局中人是否合作，又可分为合作对策和非合作对策；
- (4) 根据局中人的策略集中个数，又分为有限对策和无限对策（或连续对策）；
- (5) 也可根据局中人掌握信息的情况及决策选择是否和时间有关可分为完全信息静态对策、完全信息动态对策、非完全信息静态对策及非完全信息动态对策；也可以根据对策模型的数字特征又分为矩阵对策、连续对策、微分对策、阵地对策、凸对策、随机对策。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

### 一、完全信息静态对策

该对策是指掌握了参与人的特征、战略空间、支付函数等知识和信息并且参与人同时选择行动方案或虽非同时但后行动者并不知道前行动者采取了什么行动方案。

纳什均衡是一个重要概念。在一个战略组合中，给定其他参与者战略的情况下，任何参与者都不愿意脱离这个组合，或者说打破这个僵局，这种均衡就称为**纳什均衡**。下面以著名的“囚徒困境”来进一步阐述。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

例6 “囚徒困境”说的是两个囚犯的故事。这两个囚徒一起做坏事，结果被警察发现抓了起来，分别关在两个独立的不能互通信息的牢房里进行审讯。在这种情形下，两个囚犯都可以做出自己的选择：或者坦白（即与警察合作，从而背叛他的同伙），或者抵赖（也就是与他的同伙合作，而不是与警察合作）。这两个囚犯都知道，如果他俩都能抵赖的话，就都会被释放，因为只要他们拒不承认，警方无法给他们定罪。但警方也明白这一点，所以他们就给了这两个囚犯一点儿刺激：如果他们中的一个人坦白，即告发他的同伙，那么他就可以被无罪释放。而他的同伙就会被按照最重的罪来判决。当然，如果这两个囚犯都坦白，两个人都会被按照轻罪来判决，如下图所示。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

	坦白	抵赖
坦白	轻罪，轻罪	重罪，无罪
抵赖	重罪，无罪	释放，释放

图 囚徒困境

由分析可知，上例中每个囚犯都会选择坦白，因此这个战略组合是固定的，(坦白，坦白)就是纳什均衡解。而这个均衡是不会被打破的，即使他们在坐牢之前达成协议。

囚徒困境反映了个人理性和集体理性的矛盾。对于双方，(抵赖，抵赖)的结果是最好的，但因为每个囚徒都是理性人，他们追求自身效应的最大化，结果就变成了(坦白，坦白)。个人理性导致了集体不理性。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

## 二、完全信息动态对策

在完全信息静态对策中，假设各方都同时选择行动。现在情况稍复杂一些。如果各方行动存在先后顺序，后行的一方会参考先行者的策略而采取行动，而先行者也会知道后行者会根据他的行动采取何种行动，因此先行者会考虑自己行动会对后行者的影响后选择行动。这类问题称为完全信息动态对策问题。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

例7 某行业中只有一个垄断企业A，有一个潜在进入者——企业B。B可以选择进入或不进入该行业这两种行动，而A当B进入时，可以选择默认或者报复两种行动。如果B进入后A企业报复，将造成两败俱伤的结果，但如果A默认B进入，必然对A的收益造成损失。同样的，如果B进入而A报复，则B受损，反之，将受益。把此关系用下图表示。

		A	
		默许	报复
B	进入	50, 100	-20, 0
	不进入	0, 200	0, 200

图 A、B的行动及结果



## § 4

# 其他类型的对策论简介

上例中（B选择不进入，A选择报复）和（B选择进入，A选择默许）都是纳什均衡解。但在实际中，（B选择不进入，A选择报复）这种情况是不可能出现的。因为B知道他如果进入，A只能默许，所以只有（B选择进入，A选择默许）会发生。或者说，A选择报复行动是不可置信的威胁。对策论的术语中，称（A选择默许，B选择进入）为精炼纳什均衡。当只当参与人的战略在每一个子对策中都构成纳什均衡，这个纳什均衡才称为**精炼纳什均衡**。

当然，如果A下定决心一定要报复B，即使自己暂时损失。这时威胁就变成了可置信的，B就会选择不进入，（B选择不进入，A选择报复）就成为精炼纳什均衡。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

### 三、多人非合作对策

有三个或三个以上对策方参加的对策就是“多人对策”。多人对策同样也是对策方在意识到其他对策方的存在，意识到其他对策方对自己决策的反应和反作用存在的情况下寻求自身最大利益的决策活动。由于多人对策中出现了更多的追求各自利益的独立决策者，策略的相互依存关系相较于两人对策更为复杂，对任一对策方的决策引起的反应也要比两人对策复杂得多。

在多人对策中还有一个与两人对策有本质区别的特点，即可能存在“破坏者”。所谓破坏者即一个对策中具有下列特征的对策方：其策略选择对自身的得益没有任何影响，但却会影响其它对策方的得益，有时这种影响甚至有决定性的作用。例如有三个城市争夺某届奥运会的主办权。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

多人对策可以分为合作的和非合作的。

非合作对策顾名思义，就是局中人之间不存在合作，即各局中人在采取行动之前，没有事前的交流和约定，在其行为发生相互作用时，也不会达成任何有约束力的协议。每个局中人都选择于己最有利的策略以使效用水平最大化。然而，在非合作对策中，双方的利益也并非是完全冲突的，即对一个局中人有利的局势并不一定对其他局中人一定不利，故多人非合作对策不一定是零和对策。

如同矩阵对策中纯策略意义下的解有时不存在一样，有些非合作对策也不存在纯策略纳什均衡。在这种情况下，局中人就必须要考虑混合策略。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

## 四、非零和对策

零和对策，就是一方的收益必定是另一方的损失。这种对策的特点是不管各对策方如何决策，最后各对策方得益之和总是为零。有某些对策中，每种结果之下各对策方的得益之和不等于0，但总是等于一个非零常数，就称之为“常和对策”。当然，可以将零和对策本身看作是常和对策的特例。

“零和对策”和“常和对策”之外的所有对策都可被称为“非零和对策”。非零和对策即意味着在不同策略组合（结果）下各对策方的得益之和一般是不相同的。如前述囚徒困境就是典型的非零和对策。应该说，非零和对策是最一般的对策类型，而常和对策和零和对策都是它的特例。在非零和对策中，存在着总得益较大的策略组合和总得益较小的策略组合之间的区别，这也就意味着在对策方之间存在着互相配合，争取较大的总得益和个人得益的可能性。

两人零和对策是完全对抗性的，总得益为0，其解法可能性根据矩阵对策予以求解，但在非零和对策下，矩阵对策求解法已经不适用了。



## § 4

# 其他类型的对策论简介

例8 甲乙两公司生产同一产品，均想以登广告扩大产品销售，每家公司都有“登”与“不登”两种策略，双方的得益矩阵如下。

		乙	
		登	不登
甲	登	3, 2	9, -3
	不登	-2, 8	6, 5

图 甲乙两家公司行动及结果

从甲公司立场上看，登有利，不管乙公司如何，保证赢利至少是3，最多是9。若不登，可能要蒙受损失2。从乙公司的立场上看，同样理由，还是登广告好。但是，这是从理智行为出发的策略，是以彼此不能合作为前提的。上述两公司均采取登广告的策略是稳定的结局。可是，如果彼此能够合作，而都不登广告，免去了广告费，反而各自的赢利要多。在彼此不能合作的情况下，如果甲不登，恰好乙登，甲只好出现败局，这是非理智的策略，带有危险性。因此，非零和对策常常不易获得最理想的答案。对于三个以上的多人零和对策，互相利害关系更加复杂。

谢谢！