管理运筹学

第八章 整数规划

北京理工大学 韩伯棠 教授

第八章

整数规划

在整数规划中：

纯整数规划问题：所有变量均为非负整数

0-1 规划：变量的取值只限 0 和 1

混合整数规划问题：部分变量为非负整数

本章内容

1. 整数规划的图解法
2. 整数规划的计算机求解
3. 整数规划的应用
4. 整数规划的分枝定界法
5. 0-1规划的解法

§ 1 整数规划的图解法

例 1. 某公司拟用集装箱托运甲、乙两种货物，这两种货物每件的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如表。

货物	每件体积/立方英尺	每件重量/百千克	每件利润/百元
甲	195	4	2
乙	273	40	3
托运限制	1365	140	

甲种货物至多托运 4 件，问两种货物各托运多少件，可使获得利润最大。

§1 整数规划的图解法

解：设 x_1、x_2 分别为甲、乙两种货物托运的件数，建立模型

目标函数： $\max z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件： s.t. $195x_1 + 273x_2 \le 1\,365$ (体积限制)

$4x_1 + 40x_2 \le 140$ (重量限制)

$x_1 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$，为整数

去掉最后一个约束，是一个线性规划问题。

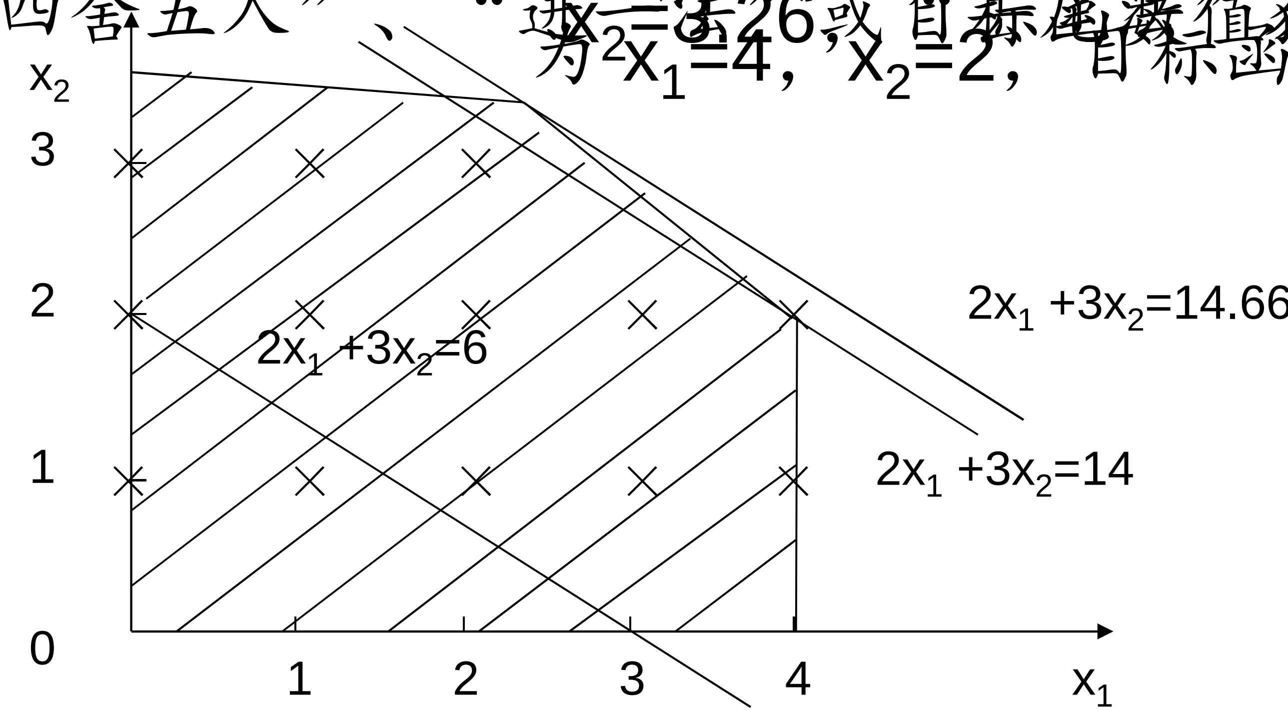
§1 整数规划的图解法

利用图解法

整数规划的最优解不都是相应的线性规划的最优解，通过“四舍五入”、“进一法”、“去尾法”

由图可看出，线性规划的最优解为 $x_1=2.44$，$x_2=3.26$，目标函数值为14.66。

由图可看出，整数规划的最优解为 $x_1=4$，$x_2=2$，目标函数值为14.



§1 整数规划的图解法

性质 1：任何求最大目标函数值的纯整数规划或混合整数规划的最大目标函数值小于或等于相应的线性规划的最大目标函数值；

任何求最小目标函数值的纯整数规划或混合整数规划的最小目标函数值大于或等于相应的线性规划的最小目标函数值。

本章内容

1 整数规划的图解法

2 整数规划的计算机求解

3 整数规划的应用

4 整数规划的分枝定界法

5 0-1规划的解法

例 **2**

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$
$$4x_2 - 3x_3 \le 2$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1, x_2, x_3 为整数

§2 整数规划的计算机求解

用管理运筹学软件求解

Result

```
***************最优解如下****************

     目标函数最优值为:   23
     变量            最优值
     ****            ******
      X1               5
      X2               2
      X3               2
     约束         松弛/剩余
     ****         *********
      1                3
      2                0
      3                0
```

§ 2 整数规划的计算机求解

例 **3**

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$

$$4x_2 - 3x_3 \le 2$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1 为整数,x_3 为 0−1 变量

§2 整数规划的计算机求解

用管理运筹学软件求解

Result

***************最优解如下****************

目标函数最优值为： 16.25

变量	最优值
****	******
X1	4
X2	1.25
X3	1

约束	松弛/剩余
****	*********
1	4.5
2	0
3	0.75

本章内容

1 整数规划的图解法

2 整数规划的计算机求解

3 整数规划的应用

4 整数规划的分枝定界法

5 0-1规划的解法

§3 整数规划的应用

一、投资场所的选择

例 4. 京成畜产品公司计划在市区的东、西、南、北四区建立销售门市部，拟议中有 10 个位置 A_j ($j=1, 2, 3, \ldots, 10$)可供选择，考虑到各地区居民的消费水平及居民居住密集度，规定：

在东区由 A_1，A_2，A_3 三个点至多选择两个；

在西区由 A_4，A_5 两个点中至少选一个；

在南区由 A_6，A_7 两个点中至少选一个；

在北区由 A_8，A_9，A_{10} 三个点中至少选两个。

§3 整数规划的应用

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
投资额	100	120	150	80	70	90	80	140	160	180
利润	36	40	50	22	20	30	25	48	58	61

A_j 各点的设备投资及每年可获利润由于地点不同而不同，预测情况如（单位：万元）。但投资总额不超过720万元，问应选择哪几个销售点，可使年利润最大？

§3 整数规划的应用

解：设：0−1 变量 $x_i = 1$ (A_i 点被选用）或 0(A_i 点没被选用）。建立数学模型：

$$\max z = 36x_1+40x_2+50x_3+22x_4+20x_5+30x_6+25x_7+48x_8+58x_9+61x_{10}$$

s.t. $100x_1+120x_2+150x_3+80x_4+70x_5+90x_6+80x_7+140x_8+160x_9+180x_{10} \le 720$ 投资额约束

$x_1 + x_2 + x_3 \le 2$ 在东区由 A_1，A_2，A_3 三个点至多选择两个

$x_4 + x_5 \ge 1$ 在西区由 A_4，A_5 两个点中至少选一个

$x_6 + x_7 \ge 1$ 在南区由 A_6，A_7 两个点中至少选一个

$x_8 + x_9 + x_{10} \ge 2$ 在北区由 A_8，A_9，A_{10} 三个点中至少选两个

$x_i \ge 0$,且 x_i 为 0-1 变量,$i = 1,2,3,\ldots,10$

§3 整数规划的应用

应用“管理运筹学软件”求解：

最优目标函数值为 245。

最优解为：

$x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0, x_5=1,$

$x_6=1, x_7=0, x_8=0, x_9=1, x_{10}=1$

§3 整数规划的应用

二、固定成本问题

例 5. 高压容器公司制造小、中、大三种尺寸的金属容器，所用资源为金属板、劳动力和机器设备，制造一个容器所需的各种资源的数量如表。不考虑固定费用，每种容器单位利润分别为 4 万元、5 万元、6 万元，可使用的金属板 500 吨，劳动力 300 人/月，机器100 台/月，此外只要生产，须支付固定费用：小号是 l00 万元，中号为 150 万元，大号为 200 万元。制定一个生产计划，使获利最大。

§3 整数规划的应用

资源	小号容器	中号容器	大号容器
金属板/t	2	4	8
劳动力/（人/月）	2	3	4
机器设备/（台/月）	1	2	3

§3 整数规划的应用

解：整数规划问题

设 x_1，x_2，x_3 分别为小号、中号和大号容器的生产数量。

固定费用：设 $y_i=1$（当生产第 i 种容器，即 $x_i>0$ 时）或 0（当不生产第 i种容器即 $x_i=0$ 时）。

引入约束 $x_i \le M y_i$ ，$i=1, 2, 3$，M 充分大。

§ 3 整数规划的应用

建立数学模型：

$$\max z = 4x_1+5x_2+6x_3-100y_1-150y_2-200y_3$$

s.t. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 500$ （金属板约束）

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 300$（劳动力约束）

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 100$（机器设备约束）

$x_i \le M\, y_i$ ， i =1，2，3，M 充分大

$x_i \ge 0$，y_i 为 0-1 变量，i = 1,2,3

软件计算：最大目标函数值为300,

最优解为x_1=100，x_2=0，x_3=0。

三、指派问题

有 n 项不同的任务，恰好 n 个人可分别承担这些任务，但由于每人特长不同，完成各项任务的效率等情况也不同。现假设必须指派每个人去完成一项任务，怎样把 n 项任务指派给 n 个人，使完成 n 项任务的总效率最高，即指派问题。

§3 整数规划的应用

例 6．有四个工人，分别指派他们完成四项不同的工作，每人做各项工作所消耗的时间如表，应如何指派工作，才能使总消耗时间最少。

工作 / 所需时间/小时 / 工人	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

§3 整数规划的应用

解：引入 0−1 变量 x_{ij},

令x_{ij} = 1(指派第 i 人去完成第 j 项工作)

x_{ij} = 0（不指派第 i 人去完成第 j 项工作）

构建0−1 整数规划问题。

§ 3 整数规划的应用

$$\text{Min } z=15x_{11}+18x_{12}+21x_{13}+24x_{14}+19x_{21}+23x_{22}+22x_{23}+18x_{24}+26x_{31}+17x_{32}+16x_{33}+19x_{34}+19x_{41}+21x_{42}+23x_{43}+17x_{44}$$

s.t $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$ （甲只能干一项工作）

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$ （乙只能干一项工作）

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$ （丙只能干一项工作）

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$ （丁只能干一项工作）

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$ （A 工作只能一人干）

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$ （B 工作只能一人干）

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$ （C 工作只能一人干）

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$ （D 工作只能一人干）

x_{ij} 为 0−1 变量，$i,j=1,2,3,4$

§3 整数规划的应用

应用“管理运筹学软件”：

最优解为$x_{21}=1$，$x_{12}=1$，$x_{33}=1$，$x_{44}=1$.

最小目标函数值为70.

§3 整数规划的应用

m个人n项任务的一般的指派问题：

设 $X_{ij}=1$，第i人去完成j项工作；

$X_{ij}=0$，第i人不去完成j项工作；

c_{ij}为第i人去完成j项任务的成本（如时间、费用）

一般指派问题的模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1, i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1,2,\cdots,n$$

也可以使用“管理运筹学软件”中“整数规划”子程序中的“指派问题”来求解

§3 整数规划的应用

四、分布系统设计

例 7. 某企业在 A_1 地有一工厂，其产品的生产能力为 30 千箱，为扩大生产，打算在 A_2，A_3，A_4，A_5 地中再选择几个地方建厂。已知在 A_2，A_3，A_4，A_5 地建厂的固定成本分别为 175 千元、300 千元、375 千元、500 千元，另外，A_1 产量及 A_2，A_3，A_4，A_5 建成厂的产量，销地的销量以及产地到销地的单位运价（每千箱运费）如表 。

§ 3 整数规划的应用

(1)该在哪几个地方建厂，在满足销量的前提下，使总固定成本和运输费用之和最小?

(2)若政策要求必须在A_2，A_3地建一个厂，应在哪几个地方建厂？

§ 3 整数规划的应用

销地 运费单价/元 产地	B_1	B_2	B_3	产量/千箱
A_1	8	4	3	30
A_2	5	2	3	10
A_3	4	3	4	20
A_4	9	7	5	30
A_5	10	4	2	40
销量/千箱	30	20	20	

。

解：

（1）设 x_{ij} 为从 A_i 运往 B_j 的运输量（单位：千箱）

$y_k = 1$（A_k 被选中）

$y_k = 0$（A_k 没被选中），$k = 2,3,4,5$.

§ 3 整数规划的应用

构建整数规划问题：

$$\min z = 175y_2+300y_3+375y_4+500y_5+8x_{11}+4x_{12}+3x_{13} +5x_{21}+2x_{22}+3x_{23}+4x_{31}+3x_{32}+4x_{33}+9x_{41}+7x_{42} +5x_{43}+10x_{51}+ 4x_{52}+2x_{53}$$

§ 3 整数规划的应用

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 30 && (A_1\ \text{厂的产量限制})\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 10y_2 && (A_2\ \text{厂的产量限制})\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 20y_3 && (A_3\ \text{厂的产量限制})\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43} \le 30y_4 && (A_4\ \text{厂的产量限制})\\
& x_{51}+x_{52}+x_{53} \le 40y_5 && (A_5\ \text{厂的产量限制})\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} = 30 && (B_1\ \text{销地的限制})\\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} = 20 && (B_2\ \text{销地的限制})\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} = 20 && (B_3\ \text{销地的限制})
\end{aligned}
$$

$x_{ij} \ge 0$,且为整数，$i = 1,2,3,4,5$；$j = 1,2,3$,

y_k 为 0−1 变量，$k = 2,3,4,5$。

注：求解可用“管理运筹学”软件中整数规划子程序。

最优解：

$y_5 = 1$, $x_{52} = 20$, $x_{53} = 20$, $x_{11} = 30$,

最优值为 860（千元）。

§3 整数规划的应用

(2) 加入约束条件：

$y_2 + y_3 = 1$

得到问题(2)的数学模型

s.t $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant 30$ （A_1 厂的产量限制）

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leqslant 10y_2$ （A_2 厂的产量限制）

$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leqslant 20y_3$ （A_3 厂的产量限制）

$x_{41}+x_{42}+x_{43} \leqslant 30y_4$ （A_4 厂的产量限制）

$x_{51}+x_{52}+x_{53} \leqslant 40y_5$ （A_5 厂的产量限制）

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} = 30$ （B_1 销地的限制）

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52} = 20$ （B_2 销地的限制）

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53} = 20$ （B_3 销地的限制）

$y_2 + y_3 = 1$

$x_{ij} \geqslant 0$, 且为整数，$i = 1,2,3,4,5$; $j = 1,2,3$,

y_k 为 0-1 变量，$k = 2,3,4,5$。

§3 整数规划的应用

最优解：

$y_2 = 1, y_4 = 1, x_{22} = 10,$

$x_{41} = 30, x_{12} = 10, x_{13} = 20,$

其余变量均为零。

最优值为 940（千元）。

§3 整数规划的应用

五、投资问题

例 8. 某公司在今后五年内考虑给以下的项目投资。已知：

项目 A：从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%，但要求第一年投资最低金额为 4 万元，第二、三、四年不限；

项目 B：第三年初需要投资，到第五年末能回收本利 128%，但规定最低投资金额为 3 万元，最高金额为 5 万元；

项目 C：第二年初需要投资，到第五年末能回收本利 140%，但规定其投资额或为 2 万元或为 4 万元，或为 6 万元或为 8 万元。

项目 D：五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息 6%，此项投资金额不限。

该部门现有资金 10 万元，问应如何确定给这些项目的每年投资额，使到第五年末拥有的资金本利总额为最大？

§3 整数规划的应用

解：（1）设 x_{iA}、x_{iB}、x_{iC}、x_{iD}（i＝1，2，3，4，5）分别表示第 i 年年初给项目 A，B，C，D 的投资额；

设 y_{iA}，y_{iB}，是 0–1 变量，取 1 时分别表示第 i 年给 A、B 投资，否则取 0（i = 1, 2, 3, 4, 5）。

设 y_{2C} 是非负整数变量，$X_{2c}=20000y_{2c}$：

当 $y_{2c}=4$，则第 2 年投资 C 项目 8 万元；

当 $y_{2c}=3$，则第 2 年投资 C 项目 6 万元；

当 $y_{2c}=2$，则第 2 年投资 C 项目 4 万元；

当 $y_{2c}=1$，则第 2 年投资 C 项目 2 万元；

当 $y_{2c}=0$，则第 2 年不投资 C 项目。

§3 整数规划的应用

建立决策变量：

投资额 项目 \ 年份	1	2	3	4	5
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}	
B			x_{3B}		
C		$X_{2c}=20000y_{2c}$			
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}

（3）目标函数及模型：

$$\max \quad z = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.28x_{3B} + 1.06x_{5D}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_{1A}+x_{1D} = 100\,000, \\
& -1.06x_{1D} + x_{2A}+x_{2C}+x_{2D} = 0, \\
& -1.15x_{1A}-1.06x_{2D} + x_{3A}+x_{3B}+x_{3D} = 0, \\
& -1.15x_{2A}-1.06x_{3D} + x_{4A}+x_{4D} = 0, \\
& -1.15x_{3A}-1.06x_{4D}+x_{5D} = 0, \\
& x_{1A}-40\,000y_{1A} \ge 0, \\
& x_{1A}-200\,000y_{1A} \le 0, \\
& x_{3B}-30\,000y_{3B} \ge 0, \\
& x_{3B}-50\,000y_{3B} \le 0, \\
& x_{2C}-20\,000y_{2C} = 0, \\
& y_{2C} \le 4, \\
& x_{iA},\ x_{iB},\ x_{iC},\ x_{iD} \ge 0
\end{aligned}
$$

y_{2C} 为非负整数，y_{1A}，y_{3B} 为 0-1 变量。

第一年：年初有 100 000 元，D

关于项目C的投资额规定：$x_{2C} = 20\,000y_{2C}$，$y_{2C} = 0，1，2，3，4$。

§3 整数规划的应用

应用“管理运筹学”软件：

最优值为147 879.234。

最优解为 $x_{2C}=60\ 000$，

$x_{3B}=49\ 905.641$，

$x_{1A}=43\ 396.23$，

$x_{1D}=56\ 603.777$，

$y_{3B}=1$，

$y_{2C}=3$，

$y_{1A}=1$.

§3 整数规划的应用

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

引入整数变量，尤其是0-1变量，可将实际管理中无法归结为线性规划模型的问题，构建整数规划模型。

§3 整数规划的应用

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

1、解决固定成本问题(例5)

生产成本最小的整数规划模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}(c_j x_j + k_j y_j)$$

约束条件： 其他原始限制条件

$$x_j \le M y_j$$

$$x_j \ge 0,\ y_j = 0或1$$

§3 整数规划的应用

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

2、解决选择取值问题（例7）

约束条件的右端项可能是n个值中的某一个

$$f(x_1, x_1, \ldots, x_n) \le \sum_{i=1}^{n} b_i y_i,$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1.$$

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{当约束右端项为 } b_i \\ 0. \text{否则} \end{cases}$$

§3 整数规划的应用

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

3、解决n个变量中选取k个变量的问题（例4、例6）

n个取1个： $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j = 0或1$

n个取k个： $\sum_{j=1}^{n} x_j = k, x_j = 0或1$

n个至少取k个： $\sum_{j=1}^{n} x_j \geq= k, x_j = 0或1$

n个至多取k个： $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq k, x_j = 0或1$

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

4、解决变量离散值的问题（例8）

$$\begin{cases} x = \sum_{j=1}^{m} c_j y_j, \; y_j = 0\text{或}1 \\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \end{cases}$$

§ 3 整数规划的应用

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

5、解决部分约束的问题

m个约束只有k个起作用

m个约束条件： $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,2,...m)$

设： $y_i = \begin{cases} 1 & \text{假定第i个约束条件不起作用} \\ 0 & \text{假定第i个约束条件起作用} \end{cases}$

$(i=1,2,...m)$

则：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + My_i & (i=1,2,...m) \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m-k \end{cases}$$

§3 整数规划的应用

六、0-1整数变量在构建模型中的一些特殊作用

6、解决逻辑关系约束的问题

若$f(x)<0$成立，则$g(x)\le 0$必须成立；

若$f(x)<0$不成立，则$g(x)$无限制。

引入一个0-1变量y来解决这一逻辑关系：

$$f(x) \ge -M(1-y)$$

$$g(x) \le My$$

七、关于灵敏度分析的讨论

在整数规划中，某个参数很小的变化可能会使最优值产生相对较大的变化。

$$\max\ 50x_1+80x_2+100x_3+150x_4$$

约束条件：$31x_1+50x_2+70x_3+90x_4 \le 120$

x_i为0-1变量

$i=1,2,3,4$

当预算资金由120万元变为121万元时，最优解？

最优解：$x_1=0, x_2=1, x_3=1, x_4=0$，最优值$z=180$.

最优解：$x_1=1, x_2=0, x_3=0, x_4=1$，最优值$z=200$.

§3 整数规划的应用

七、关于灵敏度分析的讨论

解决整数规划问题的灵敏度分析，通常需要高速计算机的帮助。

通常建议在实施最优解前对参数稍加修改，多解几次。

本章内容

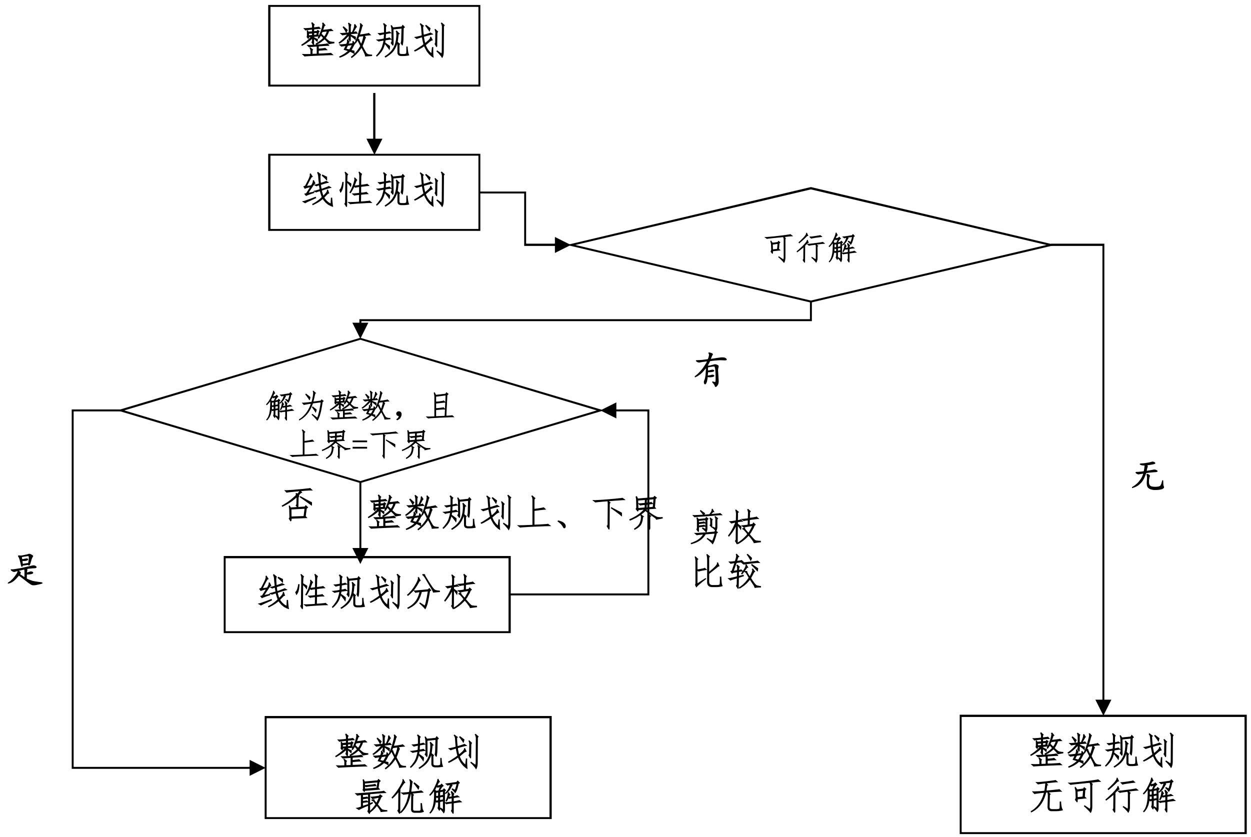
1. 整数规划的图解法
2. 整数规划的计算机求解
3. 整数规划的应用
4. 整数规划的分枝定界法
5. 0-1规划的解法

§4 整数规划的分枝定界法

分枝定界法是求解整数规划的一种常用的有效的方法。多数求解整数规划的商用软件基于分枝定界法。

§4 整数规划的分枝定界法

分枝定界法计算过程：



例 9. 用分枝定界法求解整数规划

$$\max\ 2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &195x_1+273x_2\le 1\,365\\ &4x_1+40x_2\le 140\\ &x_1\ \le 4\\ &x_1,x_2\ge 0 \text{ 且 } x_1,x_2 \text{ 为整数} \end{aligned}$$

§4 整数规划的分枝定界法

求解过程与结果

确定整数规划的最优目标函数值 z^* 初始上界和下界。分析后，知道上界为14.66，由观察法得下界为13（当 $x_1=2, x_2=3$ 时）。

解：（1）先求出以下线性规划的解。

$$\max\ 2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ 195x_1+273x_2 \leqslant 1\ 365$$
$$4x_1+40x_2 \leqslant 140$$
$$x_1 \leqslant 4$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

得 $z_1=14.66$，$x_1=2.44$，$x_2=3.26$

线性规划1
$Z_1=14.66$
$X_1=2.44$
$X_2=3.26$

$\underline{z}=13, \bar{z}=14.66$

选择目标函数较优者

将线性规划 1 分解为两支：

$x_1 \le 2$ ｜ $x_1 \ge 3$

线性规划 2：

$$\max\ 2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ 195x_1+273x_2 \leqslant 1\ 365$$
$$4x_1+40x_2 \leqslant 140$$
$$x_1 \leqslant 4$$
$$x_1 \leqslant 2$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

解得 $z_2=13.90, x_1=2, x_2=3.30$

线性规划2
$Z_2=13.90$
$X_1=2$
$X_2=3.30$

线性规划 3：

$$\max\ 2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ 195x_1+273x_2 \leqslant 1\ 365$$
$$4x_1+40x_2 \leqslant 140$$
$$x_1 \leqslant 4$$
$$x_1 \geqslant 3$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

解得 $z_3=14.58, x_1=3, x_2=2.86$

线性规划3
$Z_3=14.58$
$X_1=3$
$X_2=2.86$

$\underline{z}=13, \bar{z}=14.58$

$x_2 \le 2$ ｜ $x_2 \ge 3$

线性规划 4：

$$\max\ 2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ 195x_1+273x_2 \leqslant 1365$$
$$4x_1+40x_2 \leqslant 140$$
$$x_1 \leqslant 4$$
$$x_1 \geqslant 3$$
$$x_2 \leqslant 2$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

解得 $z_4=14, x_1=4, x_2=2$

线性规划4
$Z_4=14.00$
$X_1=4$
$X_2=2$

$\underline{z}=14, \bar{z}=14$

整数规划最优解

线性规划 5：

$$\max\ 2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ 195x_1+273x_2 \leqslant 1365$$
$$4x_1+40x_2 \leqslant 140$$
$$x_1 \leqslant 4$$
$$x_1 \geqslant 3$$
$$x_2 \geqslant 3$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

线性规划5
无可行解

线性规划 5 无可行解。

§4 整数规划的分枝定界法

性质 2：

当整数规划的最优目标函数值 z*的上界 $\bar{z}$ 等于其下界 $\underline{z}$ 时，该整数规划的最优解已经被求出。

整数规划的最优解即为其目标函数值取此下界的对应线性规划的整数可行解。

本章内容

1. 整数规划的图解法
2. 整数规划的计算机求解
3. 整数规划的应用
4. 整数规划的分枝定界法
5. 0-1规划的解法

§5 0-1规划的解法

求解0-1规划问题的方法：

1. 穷举法

检查每个变量取值为0或1的所有组合，找出满足全部约束条件的所有组合，并比较目标函数的值，求得最优解。

2. 隐枚举法

检查全部变量组合的一部分，求得问题的最优解。

分支定界法也是一种隐枚举法。

例10. 有以下0-1规划

$$\max z=4x_1+x_2+5x_3$$

约束条件：
$$2x_1+3x_2-x_3\le 3 \qquad (1)$$
$$x_1+3x_2+2x_3\ge 2 \qquad (2)$$
$$x_1+2x_2\le 2 \qquad (3)$$
$$3x_1+2x_2+x_3\ge 2 \qquad (4)$$
$$x_i=1\text{或}0, i=1,2,3.$$

§ 5

0-1规划的解法

解：

可行解：$X_1=(0,1,1)$，$z_1=6$.

增加约束条件：

$$4x_1+x_2+5x_3\geq 6 \quad （0）(过滤条件)$$

§ 5 0-1规划的解法

$$\max z=4x_1+x_2+5x_3$$

按照（0）-（4)顺序对约束条件进行排列

约束条件：

$4x_1+x_2+5x_3\ge 6$ （0）

$2x_1+3x_2-x_3\le 3$ （1）

$x_1+3x_2+2x_3\ge 2$ （2）

$x_1+2x_2\le 2$ （3）

$3x_1+2x_2+x_3\ge 2$ （4）

$x_i=1$或$0, i=1,2,3.$

可行解： $X_1=(0,1,1)$， $Z_1=6.$

增加约束条件：

$4x_1+x_2+5x_3\ge 6$ （0）(过滤条件)

§ 5 0-1规划的解法

解：应用穷举法，将解依次带入约束条件，求出目标函数值并检验是否符合过滤条件。

解	约束条件左边值					是否满足条件		z值
(x_1,x_2,x_3)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	是（√）	否（×）	
（1，1，1）	10	4					×	
（1，1，0）	5						×	
（1，0，1）	9	1	3	1	4	√		9
（1，0，0）	4						×	
（0，1，1）	6						×	
（0，1，0）	1						×	
（0，0，1）	5						×	
（0，0，0）	0						×	

$4x_1+x_2+5x_3\geq 6$ （0）(过滤条件)

$4x_1+x_2+5x_3\geq 9$ （0）(过滤条件)

§5　0-1规划的解法

求最大值问题时，可按目标函数系数的大小依次递减排列。

§5 0-1规划的解法

问题改写：

$$\max z = 5x_3 + 4x_1 + x_2$$

约束条件：

$$5x_3 + 4x_1 + x_2 \geq 6 \quad (0)$$

$$-x_3 + 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \quad (1)$$

$$2x_3 + x_1 + 3x_2 \geq 2 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (3)$$

$$x_3 + 3x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad (4)$$

x_i=1或0,i=1,2,3.

§5 0-1规划的解法

从最大值点开始取

解	约束条件左边值					是否满足条件		z值
（x_3,x_1,x_2）	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	是（√）	否（×）	
（1，1，1）	10	4				×		
（1，1，0）	9	1	3	1	4	√		9

$4x_1+x_2+5x_3\geq 6$ （0）(过滤条件)

$-x_3+2x_1+3x_2\leq 3$ （1）

§5 0-1规划的解法

例11. 有以下0-1规划

$$\min z=5x_1+3x_2+x_3$$

约束条件：
$$3x_1-2x_2+5x_3\le 6 \qquad (1)$$
$$4x_1+4x_2+3x_3\ge 3 \qquad (2)$$
$$2x_1+x_2+x_3\ge 2 \qquad (3)$$
$x_i=1$或$0, i=1,2,3.$

§5 0-1规划的解法

解：

目标函数的最小值。

按照目标函数系数的大小依次递减排列。

目标函数下限为z=0

逐渐增加过滤条件的右边值，只要找到可行解，该解即为最优解。

§ 5

0-1规划的解法

从最小值点开始取

$2x_1+x_2+x_3\geq 2$ （3）

解	约束条件左边值				是否满足条件		z值
(x_1,x_2,x_3)	(0)	(1)	(2)	(3)	是（√）	否（×）	
（0，0，0）	0	0	0		×		
（0，0，1）	1	5	3	1	×		
（0，1，0）	3	-2	4	1	×		
（0，1，1）	4	3	7	2	√		4

$5x_1+3x_2+x_3\geq 0$ （0）(过滤条件)

$3x_1-2x_2+5x_3\leq 6$ （1）

$4x_1+4x_2+3x_3\geq 3$ （2）

最优解为X=(0,1,1)，z=4.

谢 谢！