第八章 假设检验

一、假设检验的基本问题

二、假设检验的基本思想

三、双侧假设检验

四、单侧假设检验

五、两类错误及犯两类错误的概率

六、假设检验与参数估计的关系

一、假设检验的基本问题

1、什么是假设检验

是首先对总体参数提出一个某种假设，然后利用样本信息判断是否接受这个假设的统计方法

例如：由统计资料得知，1989年某地新生儿的平均体重为3190克。现从该地1990年的新生儿中随机抽取100个，测得其平均体重为3210克。问1990年的新生儿与1989年相比，体重有无显著差异？

原假设 H_0：$\mu = 3190$

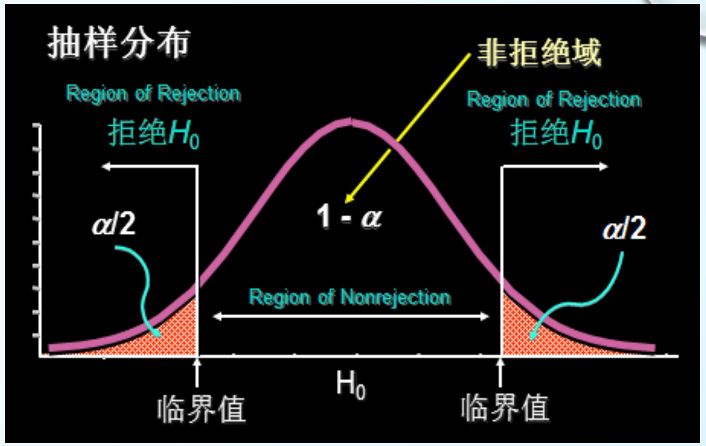
备择假设 H_1：$\mu \neq 3190$

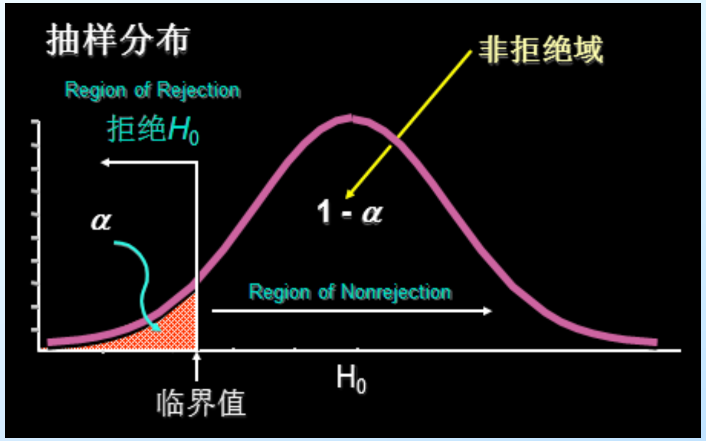
2、假设检验的分类

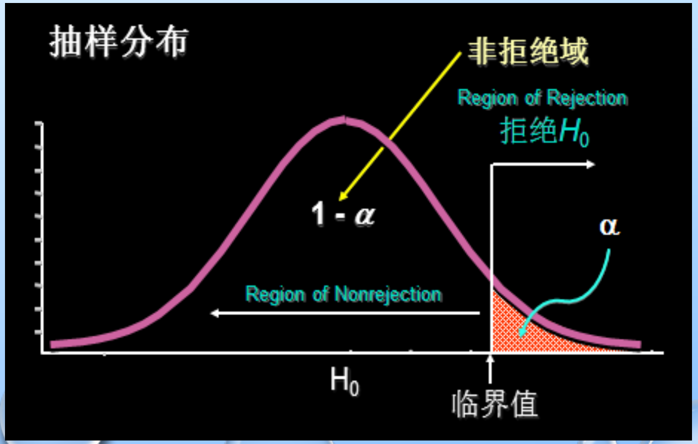
按问题性质的不同分
- 双侧检验
- 单侧检验

按参数的不同分
- 总体均值检验
- 总体比例检验
- 总体方差检验

按总体个数的不同分
- 一个总体的参数检验
- 两个总体的参数检验
- 多个总体的参数检验







二、假设检验的基本思想

一个原理：小概率事件在一次试验中几乎不会发生

一个思路：类似反证法

一个工具：统计量——不含任何未知参数的样本的函数

五个步骤：提出假设，构建统计量，界定小概率事件，做一次试验，判断（决策）

1115

三、双侧假设检验

- 一个总体
  - 总体均值检验
  - 总体比例检验
- 两个总体
  - 均值之差检验
  - 比例之差检验
  - 方差之比检验

（一）一个总体

1、总体均值的检验

（1）相关理论

总体均值：μ ?

总体方差：σ^2 ?

样本：$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

样本均值：$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum X_i$

样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{x})^2$

样本均值的期望：$E(\bar{x}) = \mu$

样本均值的方差：$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

样本均值的抽样分布：

- 正态总体
  - 大样本：$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
  - 小样本：$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- 非正态总体
  - 大样本：$\bar{x} \overset{a}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
  - 小样本：?

（2）例子

【例1即8.4】某机床厂加工一种零件，根据经验知道，该厂加工零件的椭圆度近似服从正态分布，其总体均值为0.081MM。今换一种新机床进行加工， 抽取200个零件进行检验，得到的椭圆度均值为0.076MM，样本标准差为0.025 MM。试问新机床加工零件的椭圆度均值与以前有无显著差异？（显著性水平为0.05）（大样本且总体标准差未知）

①提出假设:

$H_0: \mu = 0.081 = \mu_0$

$H_1: \mu \neq 0.081$

$N(0,1)$

②构建统计量:

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，标准化: $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

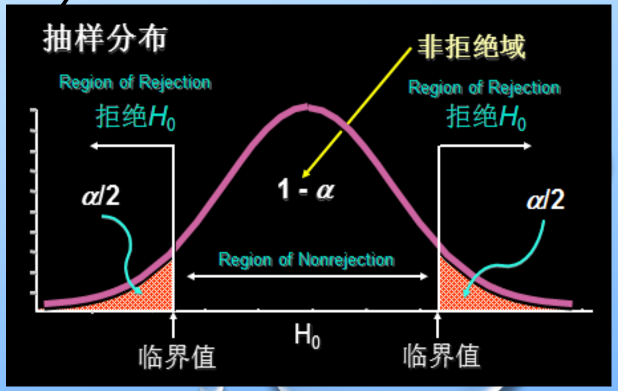
$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$（假定$H_0$成立）

③界定小概率事件:

显著性水平: α

发生概率 $\leq \alpha$ 的事件.

$\alpha = \begin{cases} 0.01 & *** \\ 0.05 & ** \\ 0.10 & * \end{cases}$



④做一次试验：

即从总体中随机抽取一个具体的样本 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$

得到统计量的一个具体值：

$$t^0 = \frac{\bar{x}^0 - \mu_0}{s^0/\sqrt{n}} = \frac{0.076 - 0.081}{0.025/\sqrt{200}} = -2.83$$

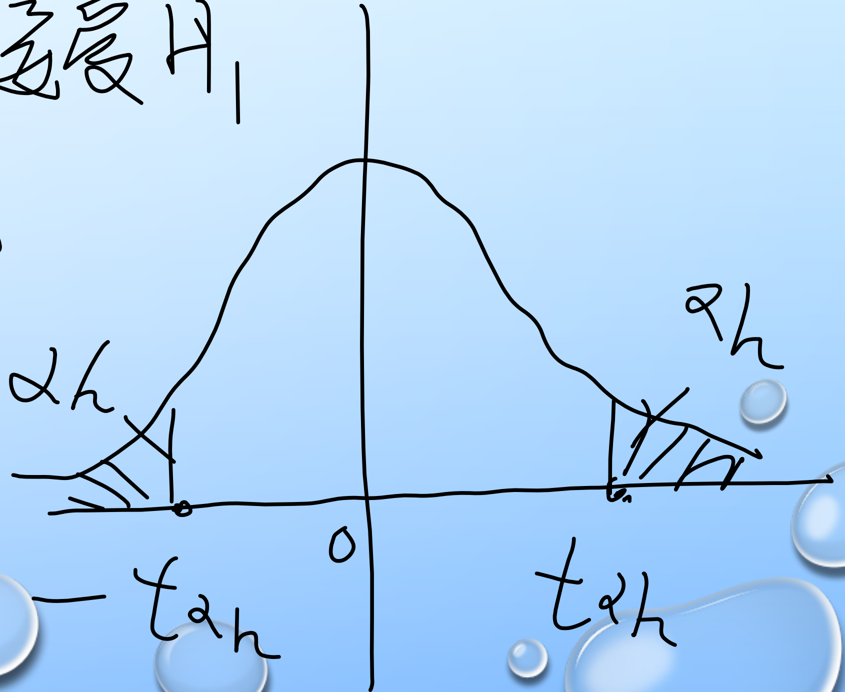
⑤判断（决策）

临界值法

$$\text{拒绝域} = \begin{cases} \text{若 } |t^0| > t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{拒绝}H_0\text{，接受}H_1 \\ \text{若 } |t^0| < t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{接受}H_0 \end{cases}$$

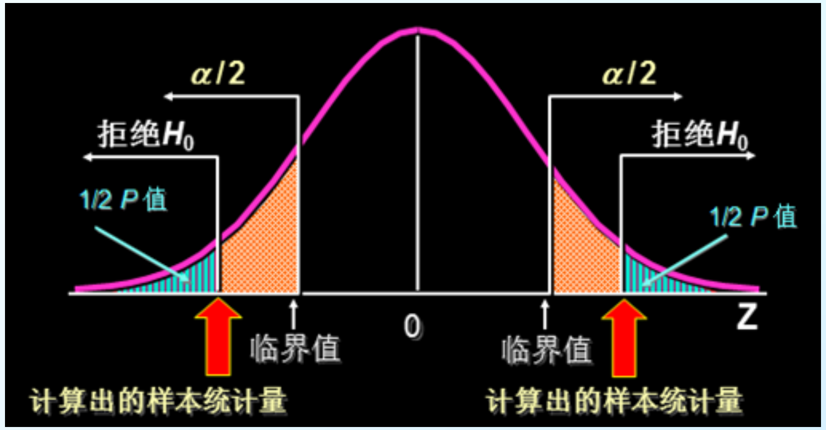
$\alpha = 0.05$, $t_{\alpha/2} = 1.9720$

$\because |t^0| > t_{\alpha/2}$ $\therefore$ 拒绝H_0



P值法

P值$= P(|t|>|t^0|)$



$p<\alpha \Leftrightarrow |t'|>t_{\alpha/2} \Rightarrow$ 拒绝H_0。

$p>\alpha \Leftrightarrow |t'|<t_{\alpha/2} \Rightarrow$ 接受H_0。

本例：p值 $= p(|t|>|-2.83|)=0.004655<0.05=\alpha$

即 $p<\alpha \Rightarrow$ 拒绝H_0。

一个经常混淆的问题：拒绝H_0不等于H_0一定不成立

假设被拒绝不等于证明！接受H_0也不等于H_0一定成立！

补充

$\xi \sim N(0,1)$
$\eta \sim \chi^2(m)$ 独立

则 $\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta/n}} \sim t(m)$

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 大样本 统计样本

$\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 正态总体

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Big/ \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\underbrace{\sum(X_i-\bar{X})^2/(n-1)}_{=S^2}}$$

$$= \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

【例2即8.7】某机器制造出的肥皂厚度为5CM，今欲了解机器性能是否良好，随机抽取10块肥皂作为样本，测得平均厚度为5.3CM，标准差为0.3CM，试以0.05的显著性水平检验机器性能是否良好

① 提出假设：H_0 $\mu = 5 = \mu_0$

H_1 $\mu \neq 5$

② 统计量：

$$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(9)$$

③ 确定小概率事件

$\alpha = 0.05$，$t_{\alpha/2} = 2.2622$

④ 做一次试验

得．$\bar{x}^0 = 5.3$，$s^0 = 0.3$

$$t^0 = \frac{\bar{x}^0-\mu_0}{s_0/\sqrt{n}} = \frac{5.3-5}{0.3/\sqrt{10}} = 3.16$$

⑤ 判断

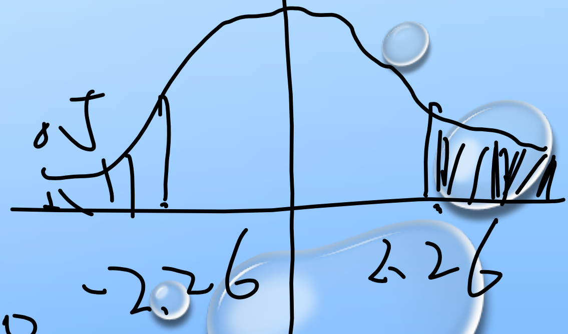
1 临界值法：$|t^0| = 3.16 > 2.26 = t_{\alpha/2}$

故拒绝 H_0

p值法：

p值 $= 0.01155 < 0.05$

故拒绝 H_0



2、总体比例

（1）相关理论

总体比例：π（如总体检团发生率）

样本比例：p

样本比例的期望：$E(p)=\pi$

样本比例的方差：$D(p)=\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}$

$$X=\begin{cases}1, & 患病\\ 0, & 不患病\end{cases}$$

样本：$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

样本比例：$p=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

则 $E(p)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E(X_i)}_{=\pi}=\pi$

$D(p)=\dfrac{1}{n^2}\sum D(X_i)$

而 $D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2$
$=\pi-\pi^2=\pi(1-\pi)$

$\therefore D(p)=\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}$

样本比例的抽样分布.

$$p\overset{a}{\sim}N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$

（2）例子【例3即8.8】一项统计结果声称， 某市老年人口（年龄在65岁以 上）的比重为14.7%，该市老年人口研究会为了检验该项统 计是否可靠，随机抽选了400 名居民，发现其中有57人年龄 在65岁以上。调查结果是否支持该市老年人口比重为14.7%的看法？(显著性水平为0.05)（大样本）

① 提出假设 $H_0: \pi = 14.7\% = \pi_0$

$H_1: \pi \neq 14.7\%$

② 统计量

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

③ 界定小概率事件：

$\alpha = 0.05$, $Z_{\alpha/2} = 1.96$

④ 做一个试验

$$p^0 = \frac{57}{400} = 14.25\%$$

$$Z^0 = \frac{p^0 - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} = -0.254$$

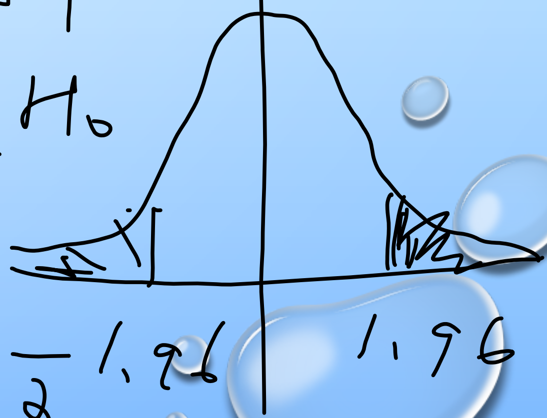
⑤ 判断

临界值法：$|Z^0| < Z_{\alpha/2}$

故接受 H_0

P值法：

P值 $= 0.3998 > \frac{\alpha}{2}$



（二）两个总体（均为正态且方差均已知）

1、相关理论

两个总体均值之差：$\mu_1-\mu_2$

两个样本均值之差：$\bar{x}_1-\bar{x}_2$

两个样本均值之差的期望：$E(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=\mu_1-\mu_2$

两个样本均值之差的方差：$D(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=D(\bar{x}_1)+D(\bar{x}_2)=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$

两个样本均值之差 的分布：$\bar{x}_1-\bar{x}_2\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

$$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

2、例子

【例 4即8.8】有两种方法可用于制造某种以抗拉强度为重要特征的产品。根据以往的资料得知，第一种方法生产出的产品其抗拉强度的标准差为8 公斤，第二种方法的标准差为10公斤。从两 种方法生产的产品中各抽取一个随机样本，样本量分别为32，40，测得样本均值分别为50，44公斤。问这两种方法生产的产品平均抗拉强度否有显著差别

① $H_0: \mu_1-\mu_2=0$

$H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$

② 统计量：

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

③ 界定小概率门限

$\alpha=0.05$, $Z_{\alpha/2}=1.96$

④ 做一次试验

$\bar{x}_1=50$, $\bar{x}_2=44$

$n_1=32$, $n_2=40$, $\bar{x}_1=50$, $\bar{x}_2=44$

$\sigma_1=8$, $\sigma_2=10$.

$$Z_0=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{50-44}{\sqrt{\frac{8^2}{32}+\frac{10^2}{40}}}=2.83$$

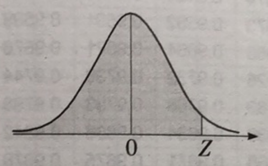
临界值法. $|Z_0|=2.83>1.96=Z_{\alpha/2}$

故拒绝H_0. $\alpha/2$

P值法：

$P=0.0046<\alpha$

附表 1　　标准正态分布表



利用 Excel 提供的统计函数“NORM. S. DIST”，可以生成标准正态
P(Z≤x)。生成标准正态分布概率表的具体操作步骤如下。

第 1 步：将 x 的值（可根据需要确定）输入到工作表的 A 列，将 x 取值的尾
行，形成标准正态分布表的表头，如下表所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
2	0.0								
3	0.1								
4	0.2								
5	0.3								
6	0.4								
7	0.5								
8	0.6								
9	0.7								
10	0.8								
11	0.9								
12	1.0								

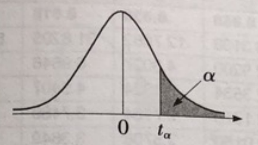
第 2 步：在 B2 单元格输入公式“＝NORM. S. DIST($A2＋B$1)”，然后
右复制即可得到标准正态分布概率表，部分结果如下表所示（读者
成不同 x 的标准正态分布概率表）。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**x**	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
2	**0.0**	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.535
3	**0.1**	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.575
4	**0.2**	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
5	**0.3**	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
6	**0.4**	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
7	**0.5**	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
8	**0.6**	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
9	**0.7**	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
10	**0.8**	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
11	**0.9**	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
12	**1.0**	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
13	**1.1**	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
14	**1.2**	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
15	**1.3**	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
16	**1.4**	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
17	**1.5**	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
18	**1.6**	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
19	**1.7**	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
20	**1.8**	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
21	**1.9**	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
22	**2.0**	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
23	**2.1**	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
24	**2.2**	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
25	**2.3**	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
26	**2.4**	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
27	**2.5**	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
28	**2.6**	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
29	**2.7**	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
30	**2.8**	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
31	**2.9**	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
32	**3.0**	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
33	**3.1**	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
34	**3.2**	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
35	**3.3**	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
36	**3.4**	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
37	**3.5**	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
38	**3.6**	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
39	**3.7**	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
40	**3.8**	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
41	**3.9**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
42	**4.0**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1	p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
2	**0.50**	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.022
3	**0.51**	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.047
4	**0.52**	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.072
5	**0.53**	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.097
6	**0.54**	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.123
7	**0.55**	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.148
8	**0.56**	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.173
9	**0.57**	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.199
10	**0.58**	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.225
11	**0.59**	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.250
12	**0.60**	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.276
13	**0.61**	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.302
14	**0.62**	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.329
15	**0.63**	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.355
16	**0.64**	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.382
17	**0.65**	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.409
18	**0.66**	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.437
19	**0.67**	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.464
20	**0.68**	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.493
21	**0.69**	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
22	**0.70**	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
23	**0.71**	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
24	**0.72**	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
25	**0.73**	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
26	**0.74**	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
27	**0.75**	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
28	**0.76**	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
29	**0.77**	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
30	**0.78**	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
31	**0.79**	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
32	**0.80**	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
33	**0.81**	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
34	**0.82**	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502
35	**0.83**	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
36	**0.84**	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
37	**0.85**	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
38	**0.86**	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
39	**0.87**	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
40	**0.88**	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
41	**0.89**	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
42	**0.90**	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
43	**0.91**	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
44	**0.92**	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
45	**0.93**	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
46	**0.94**	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
47	**0.95**	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
48	**0.96**	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
49	**0.97**	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
50	**0.98**	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904

附表 3

t 分布临界值表



利用 Excel 提供的统计函数"T. INV"，可以构建 t 分布临界值表，该表
布的右尾概率 α 计算的相应的临界值。如果 $P(t \geqslant x)=\alpha$，则对于任意
$p(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，可以求出相应的 x。生成 t 分布临界值表的具体操作步骤如下。

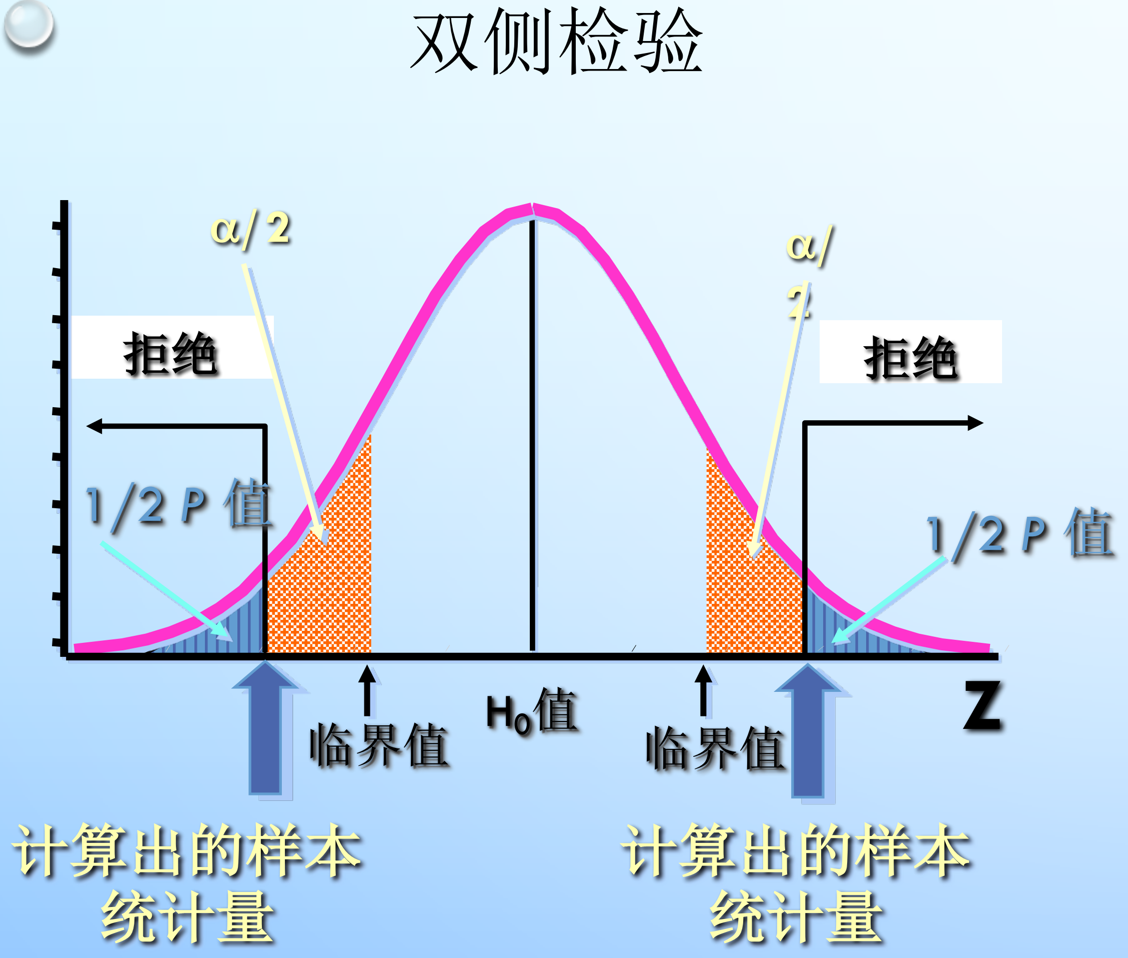
第 1 步：将 t 分布自由度 df 的值输入到工作表的 A 列，将右尾概率 α 的取值输入
行，形成 t 分布临界值表的表头，如下表所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	df/α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	0.000
2	1							
3	2							
4	3							
5	4							
6	5							
7	6							
8	7							
9	8							
10	9							
11	10							
12	11							
13	12							
14	13							
15	14							
16	15							
17	16							
18	17							
19	18							
20	19							
21	20							

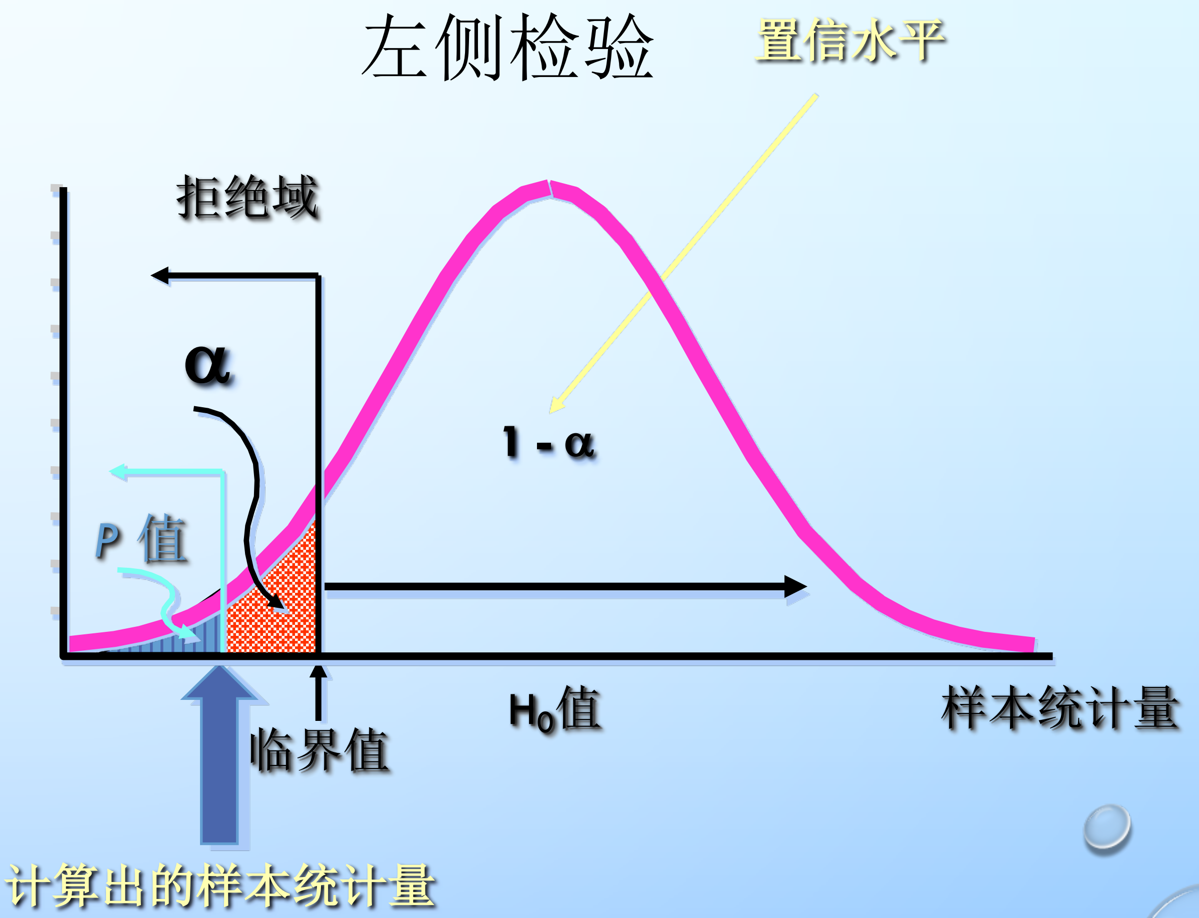
第 2 步：在 B2 单元格输入公式"=T. INV (B$1, $A2) * -1"，然后将其向下
制即可得到 t 分布临界值表，部分结果如下表所示（读者可根据需要生
和不同自由度的 t 分布临界值表）。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**df/α**	**0.100**	**0.050**	**0.025**	**0.010**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
2	**1**	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	318.3088	636.6192
3	**2**	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.3271	31.5991
4	**3**	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.2145	12.9240
5	**4**	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
6	**5**	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
7	**6**	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
8	**7**	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
9	**8**	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
10	**9**	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
11	**10**	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
12	**11**	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
13	**12**	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
14	**13**	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
15	**14**	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
16	**15**	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
17	**16**	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
18	**17**	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
19	**18**	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
20	**19**	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
21	**20**	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
22	**21**	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
23	**22**	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
24	**23**	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
25	**24**	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
26	**25**	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
27	**26**	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
28	**27**	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
29	**28**	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
30	**29**	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
31	**30**	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
32	**31**	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440	3.3749	3.6335
33	**32**	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.3653	3.6218
34	**33**	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.3563	3.6109
35	**34**	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.3479	3.6007
36	**35**	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	3.3400	3.5911
37	**36**	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195	3.3326	3.5821
38	**37**	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154	3.3256	3.5737
39	**38**	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116	3.3190	3.5657
40	**39**	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079	3.3128	3.5581
41	**40**	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
42	**41**	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012	3.3013	3.5442
43	**42**	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981	3.2960	3.5377
44	**43**	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951	3.2909	3.5316
45	**44**	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923	3.2861	3.5258
46	**45**	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	3.2815	3.5203

四、单侧假设检验



双侧检验
α/2
α/2
拒绝
拒绝
1/2 P 值
1/2 P 值
临界值
H0值
临界值
Z
计算出的样本统计量
计算出的样本统计量



左侧检验
置信水平
拒绝域
α
1 - α
P 值
临界值
H0值
样本统计量
计算出的样本统计量

双侧检验与单侧检验

(假设的形式)

假设	研究的问题		
	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$
H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$

大样本且总体标准差已知

【例4即8.2】某批发商欲从厂家购进一批灯泡，根据合同规定灯泡的使用寿命平均不能低于1000小时。已知灯泡燃烧寿命服从正态分布，标准差为200小时。在总体中随机抽取了100个灯泡，得知样本均值为960小时，批发商是否应该购买这批灯泡？（显著性水平为0.05）

- ①提出假设：**H_0: $\mu \geq 1000$ H_1: $\mu < 1000$** （左单侧检验）
- ②构建统计量：$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- ③界定小概率事件：显著性水平α=0.05
- ④做一次试验：从总体中随机抽取一个具体的样本 μ_0=1000，$\bar{x}$=960， σ=200， n=100,

  得到统计量的一个具体值 $Z=\dfrac{960-1000}{200/\sqrt{100}}=-2$

- ⑤判断（决策）

1. 临界值法

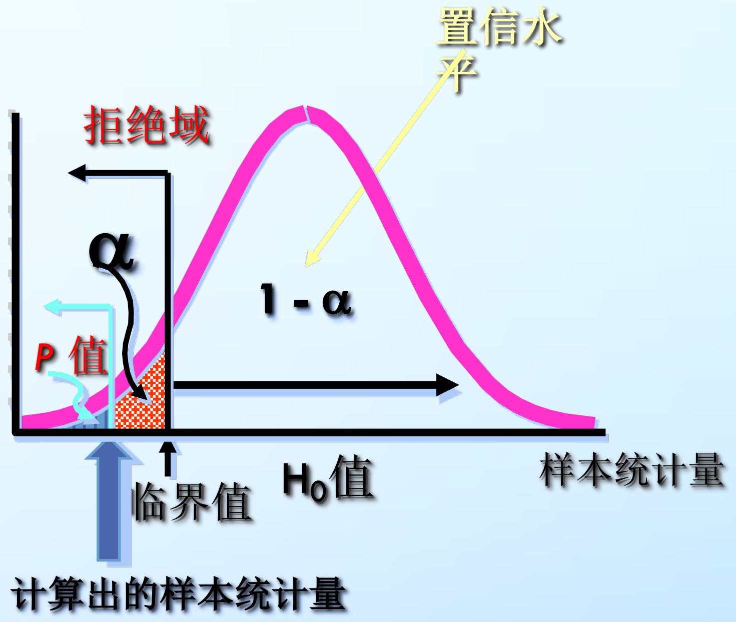
拒绝域在左侧，故临界值为负，查表z_{α}=−1.645.

规则：若$z < z_{\alpha}$, 则z的值位于拒绝域，拒绝H0；

若$z > z_{\alpha}$, 则z的值位于非拒绝域，无法拒绝H0；

这里Z=-2, 落入拒绝域，所以拒绝H0，

即这批灯泡的使用寿命低于1000小时，批发商不应该购买。



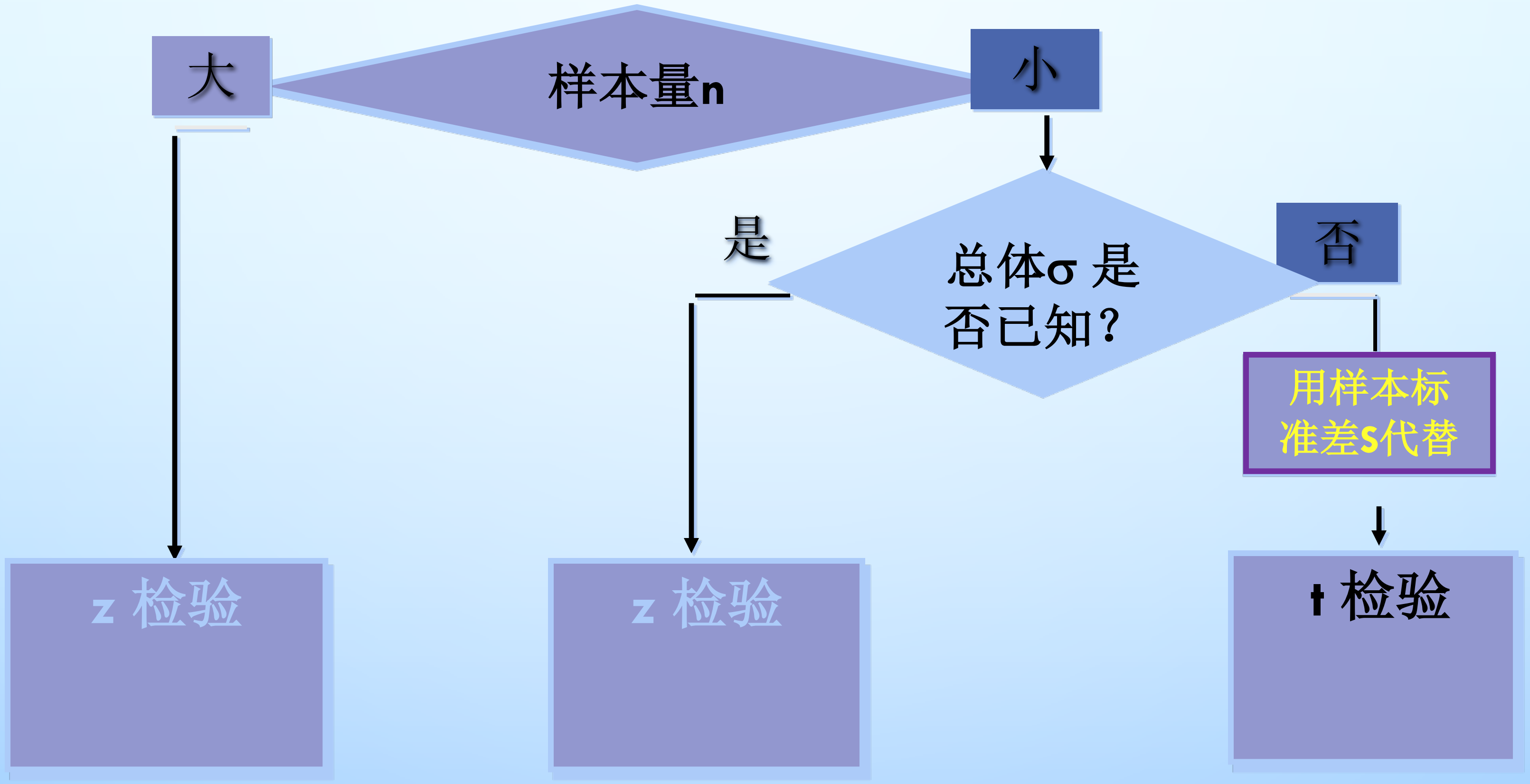
2. P值法

在EXCEL里使用NORMSDIST函数，找到统计量绝对值2对应的函数值为0.97724987，

单侧检验，故P = 1-0.97725 = 0.02275；

因为$P < \alpha$， 所以拒绝H0

总体均值的检验
(检验统计量)



小样本且总体标准差已知

【例5即8.6】某电子元件批量生产的质量标准为平均使用寿命1200小时，标准差为150小时。某厂宣称它采用一种新工艺生产的元件质量大大超过规定标准。为了进行验证，随机抽取20件作为样本，测得平均使用寿命为1245小时。能否说该厂的元件质量显著高于规定标准？

- ①提出假设：$H_0: \mu \leq 1200$ $H_1: \mu > 1200$ （右单侧检验）
- ②构建统计量：$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- ③界定小概率事件：显著性水平α=0.05
- ④做一次试验：从总体中随机抽取一个具体的样本 μ_0=1200，$\bar{x}$=1245， σ=150， n=20,

得到统计量的一个具体值 $Z=\dfrac{1245-1200}{150/\sqrt{20}} = 1.34$

- ⑤判断（决策）

1. 临界值法

右单侧检验，拒绝域在右侧，查表z_{α}=1.645.

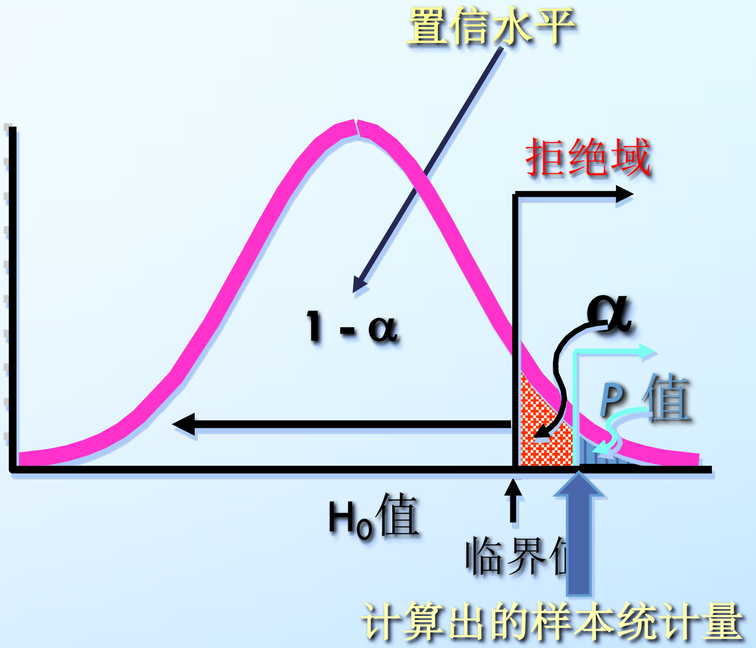
规则：若$z > z_{\alpha}$, 则z的值位于拒绝域，拒绝Ho;

若$z < z_{\alpha}$, 则z的值位于非拒绝域，无法拒绝Ho;

这里Z=1.34, 在非拒绝域，所以不能拒绝Ho,

即还不能说该厂产品质量显著高于规定标准。

注意：这里不说~~“接受原假设Ho”~~✕



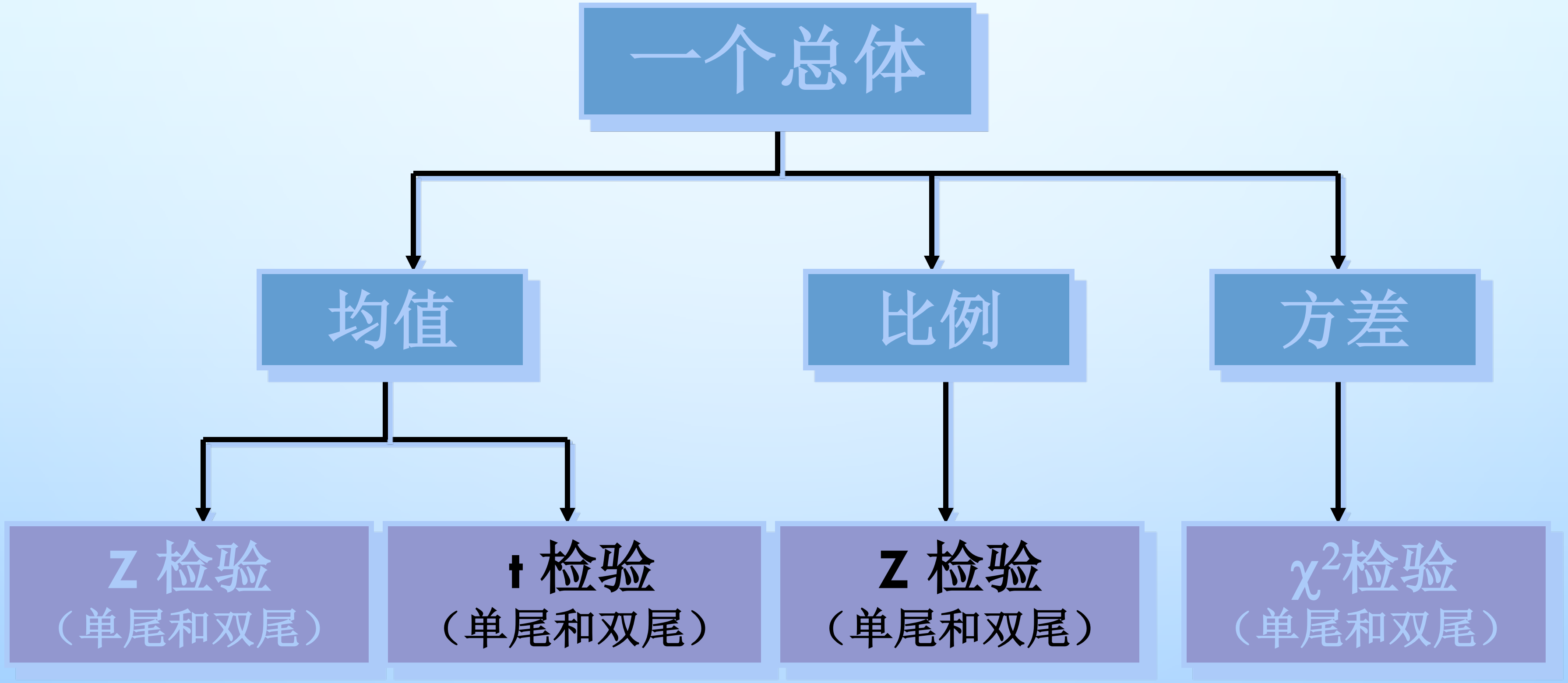
2. P值法

在EXCEL里使用NORMSDIST函数，找到统计量1.34对应的函数值为0.9099,

单侧检验，故P = 1-0.9099 = 0.0901；

因为$P > \alpha$， 所以无法拒绝Ho

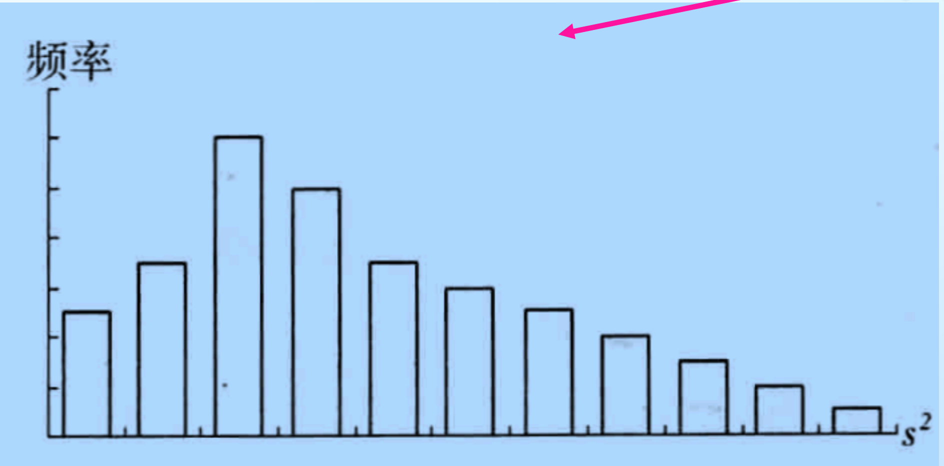
一个总体参数的检验



总体方差的检验
(χ^2 检验)

1. 检验一个总体的方差或标准差
2. 假设总体近似服从正态分布

偏态分布
单侧检验



3. 检验统计量

样本方差

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

假设的总体方差

【例6即8.9】某厂商生产出一种新型的饮料装瓶机器，按设计要求，该机器装一瓶1000ML的饮料误差上下不超过1ML。如果达到设计要求，表明机器的稳定性非常好。先从该机器装完的产品中随机抽取25瓶，分别进行测定（用样本观测值分别减1000ML），得到如表所示结果。

表 8—2　　25 瓶饮料容量测试结果　　单位：ml

0.3	−0.4	−0.7	1.4	−0.6
−0.3	−1.5	0.6	−0.9	1.3
−1.3	0.7	1	−0.5	0
−0.6	0.7	−1.5	−0.2	−1.9
−0.5	1	−0.2	−0.6	1.1

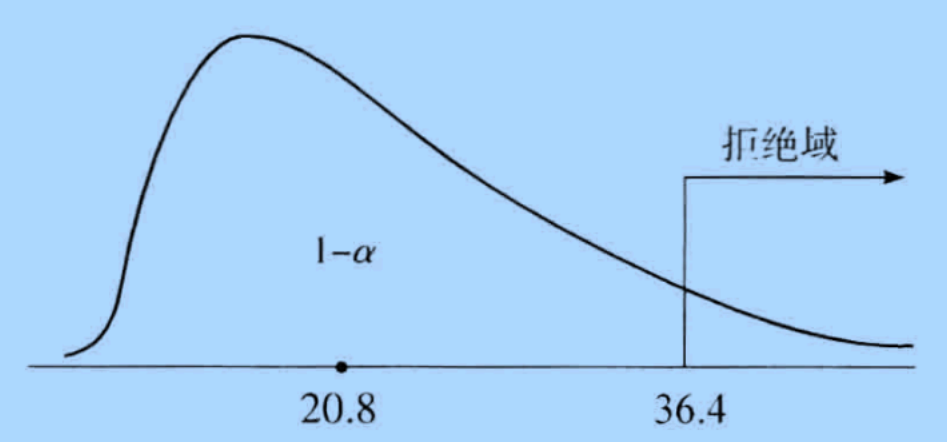
- ①提出假设：**H0: $\sigma^2 \le 1$　H1: $\sigma^2 > 1$**　（单侧检验）
- ②构建统计量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$
- ③界定小概率事件：显著性水平α=0.05
- ④做一次试验：s^2=0.866，σ^2=1，n=25，得到统计量值 $\chi^2 = \dfrac{(25-1)0.866}{1} = 20.8$

- ⑤判断（决策）

右单侧检验，拒绝域在右侧，查表$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$

这里$\chi^2=20.8$, $\chi^2 < 36.415$, 在非拒绝域，所以不能拒绝H_0，

即该机器的性能达到设计要求。



单侧检验中假设的建立

在单侧检验中，如何建立假设是一个需要考虑的问题。如果是左侧检验，即

$$H_0: \mu \geqslant \mu_0$$
$$H_1: \mu < \mu_0$$

当 $|\bar{x} - \mu_0| < \Delta$ 时，不拒绝 H_0。

如果是右侧检验，即

$$H_0: \mu \leqslant \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

当 $|\bar{x} - \mu_0| < \Delta$ 时，不拒绝 H_0。这样，同一个数据却得出相反的结论。这种情况可以由下面的例子得到说明。

某种灯泡的质量标准是平均燃烧寿命不得低于 1 000 小时。已知灯泡批量产品的燃烧寿命服从正态分布，且标准差为 100 小时。商店欲从工厂进货，随机抽取 81 个灯泡检查，测得 $\bar{x}=990$ 小时，问商店是否决定购进这批灯泡（$\alpha=0.05$）?

解：这里可以有两种假设。

第一种，认为该厂生产的灯泡不会低于规定的质量标准，故检验 $\mu\geqslant 1\,000$ 小时是否成立。

$$H_0:\mu\geqslant 1\,000$$
$$H_1:\mu<1\,000$$

这是左侧检验，检验统计量 z 为：

$$z=\frac{990-1\,000}{100/\sqrt{81}}=-0.9$$

而 $z_\alpha=-1.645$，由于 $|z|<|z_\alpha|$，所以不能拒绝 H_0，即可以认为该厂生产的灯泡达到了规定的质量标准。

第二种，认为该厂生产的灯泡很可能低于规定的质量标准，故检验 $\mu \leqslant 1\,000$ 小时是否成立。

$$H_0: \mu \leqslant 1\,000$$

$$H_1: \mu > 1\,000$$

这是右侧检验，临界值 $z_\alpha = 1.645$ 在分布曲线的右侧，检验统计量 $z = -0.9$，故同样不能拒绝 H_0，即认为灯泡的质量没有达到规定标准。

- 采用新技术后，将会使产品的使用寿命延长到 5 000 小时以上。

$H_0: \mu \leqslant 5\ 000$　　不能轻易否定的命题

$H_1: \mu > 5\ 000$　　需要验证的命题

- 改进生产工艺后，会使产品的废品率降到 1%以下。

$H_0: \pi \geqslant 1\%$　　不能轻易否定的命题

$H_1: \pi < 1\%$　　需要验证的命题

- 一项研究认为，与不吸烟相比，吸烟容易导致肺癌。

$H_0: \pi_1 \geqslant \pi_2$　　不能轻易否定的命题

$H_1: \pi_1 < \pi_2$　　需要验证的命题

五、假设检验中的两类错误

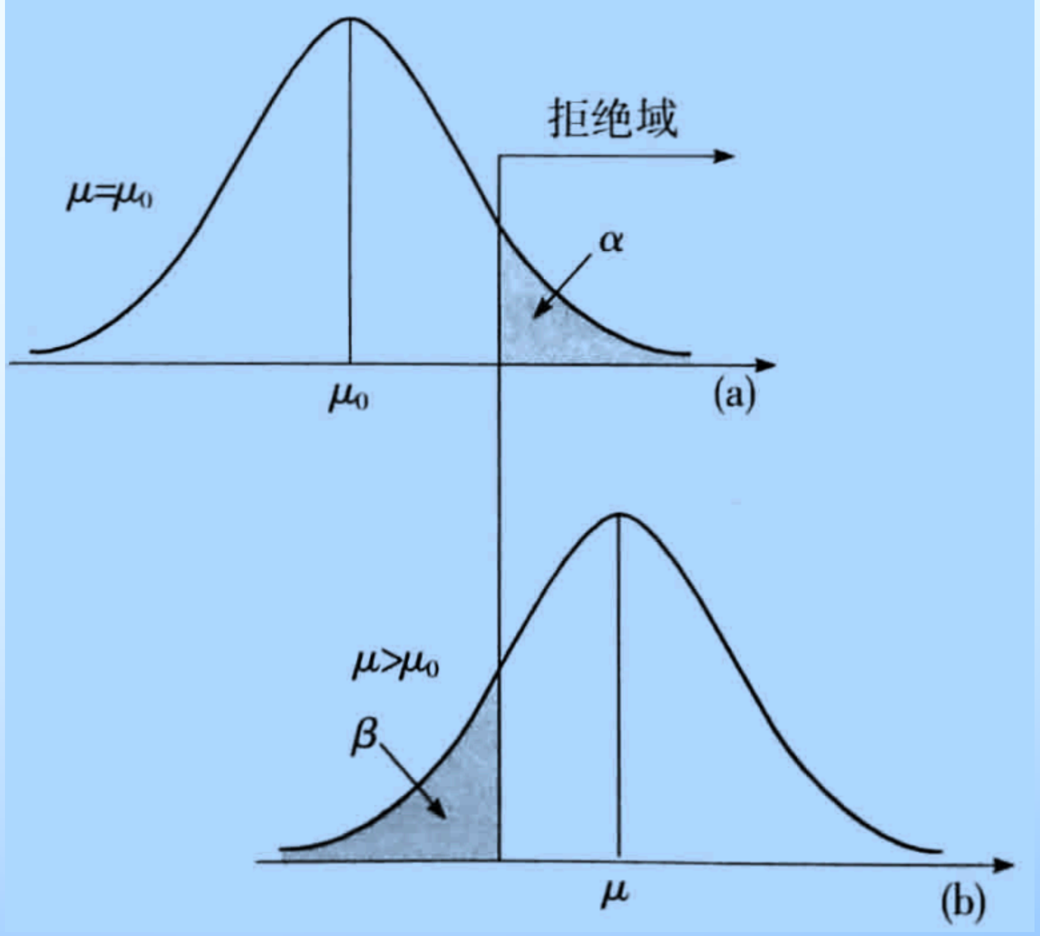
- **1. 第一类错误（弃真错误）**
  - 原假设为真时拒绝原假设
  - 第一类错误的概率为α
    - 被称为显著性水平
- **2. 第二类错误（取伪错误）**
  - 原假设为假时接受原假设
  - 第二类错误的概率为β

- α错误：原假设 **H0:** $\mu \geq 12$ 是正确的，但我们做出了错误的判断，认为 **H1:** $\mu < 12$ ，即在假设检验中拒绝了本来是正确的原假设，犯了弃真错误；
- β错误：原假设 **H0:** $\mu \geq 12$ 是错误的，但我们却认为原假设 **H0:** $\mu \geq 12$ 是成立的，即在假设检验中没有拒绝本来是错误的原假设，犯了取伪错误；

表 8—1　　假设检验中各种可能结果的概率

项目	没有拒绝 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	$1-\alpha$（正确决策）	α（弃真错误）
H_0 为伪	β（取伪错误）	$1-\beta$（正确决策）

- **对于给定的样本**，$\boldsymbol{\alpha}$和β是此消彼长的关系（要想使$\boldsymbol{\alpha}$和β同时变小，要增大样本量，可行性低）
- 原则：首先控制犯$\boldsymbol{\alpha}$错误。



六、假设检验与参数估计

1. 相同点：

- 根据样本信息对总体参数进行推断；
- 以抽样分布为理论依据，建立在概率论基础之上的统计推断，推断结果都有一定的可信程度。

2. 从推断角度上看不同点：

- 参数估计时，估计前总体参数是未知的，主要讨论用样本统计量对总体参数进行估计；
- 假设检验时，则是先对未知参数提出一定的假设，然后再利用样本信息去检验所提假设是否成立。

3. 那么它们之间有没有联系呢？

- 在参数的置信区间估计中，记 1- α 为置信度，反映区间估计的可信度， α 为置信水平。在置信水平下，利用样本信息对未知参数进行估计，并以 1- α的概率保证总体参数落在该区间内， α 越小，置信区间也就越宽。
- 在假设检验中，一旦显著性水平 α 和检验统计量确定，临界值的位置也就确定了。

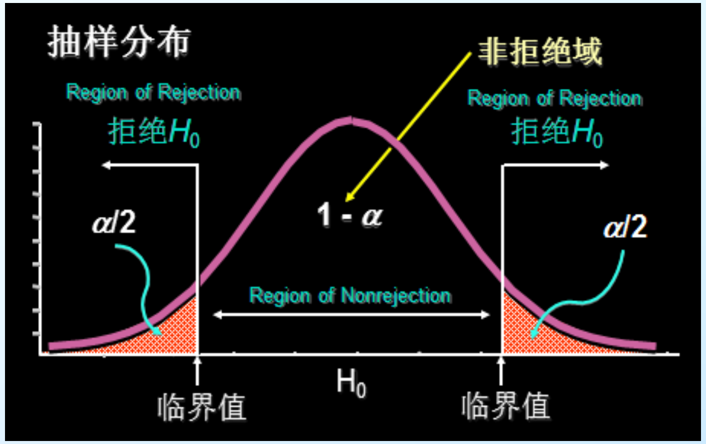
用置信区间进行假设检验
（以双侧检验为例）

- **H0**: $\mu = \mu_0$　**H1**: $\mu \neq \mu_0$
- 是否接受原假设**H0**，取决于 μ 的统计量是否落在这个区间内。
- 若原假设 **H0**为真，则在假设下μ的统计量几乎不可能落在置信区间外；
- 而若落在置信区间外面，就认为小概率事件发生了，利用“小概率原理”，则推断 **H0** 为假，从而拒绝 **H0**
- α越小，置信区间就越宽，犯“弃真错误 ”可能性变小 。
- 因此，可以用置信区间进行假设检验。

用置信区间进行假设检验
（以双侧检验为例）

1. H0: μ =μ_0　H1: μ ≠ μ_0

- 在显著性水平 α 下检验的接受域为：
- $|z| \le z_{\alpha/2}$ 即 $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}$
- 可改写为 $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu_0 \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 这就得到了μ 在1- α 置信水平下的置信区间：$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



2. 反之，如果有一个置信度1- α 的置信区间 $\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，也可以获得关于H0: μ =$\mu_0$ H1: μ ≠ μ_0 的显著性水平为 α 的检验。

3. 因此，正态均值μ的1- α 置信区间与关于H0: μ =μ_0 H1: μ ≠ μ_0的双侧检验问题的显著性水平为 α 的假设检验一一对应。

- 【例双侧检验】一家食品生产企业以生产袋装食品为主，为对食品质量进行监测，企业质检部门经常要进行抽检，以分析每袋重量是否符合要求。现从某天生产的一批食品中随机抽取了25袋，测得平均重量为105.36克。已知产品重量的分布服从正态分布，且总体标准差为10克。问该企业生产的食品重量与规定标准100克有无差别？显著性水平为0.05。

- **假设检验**
- ①提出假设：**H_0: $\mu = 100$ H_1: $\mu \neq 100$**
- ②构建统计量：$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- ③界定小概率事件：显著性水平α=0.05
- ④做一次试验：从总体中随机抽取一个具体的样本 μ_0=100，$\bar{x}$=105.36， σ=10， n=25,

  得到统计量的一个具体值 $Z=\dfrac{105.36-100}{10/\sqrt{25}}=2.68$
- ⑤判断（决策）

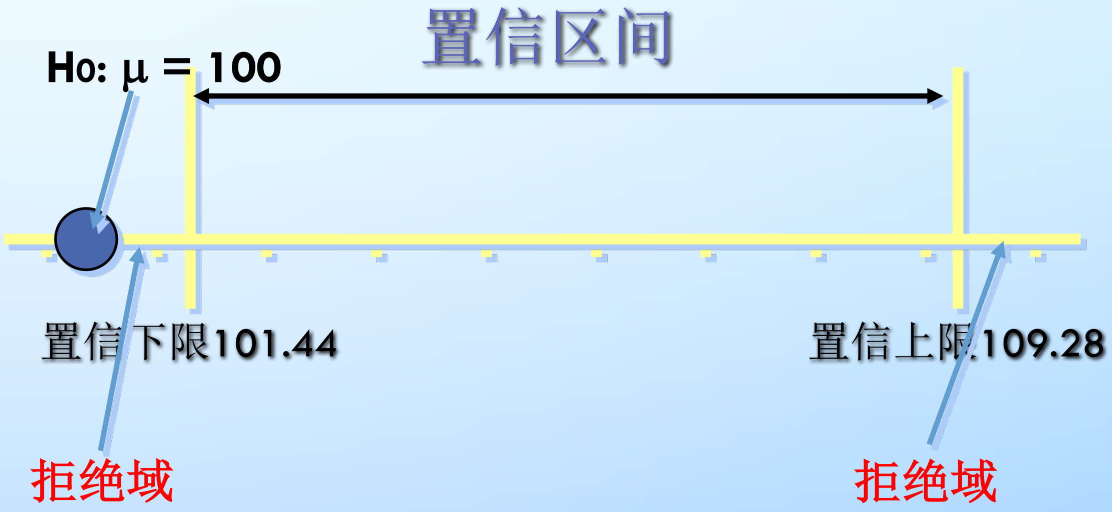
  查表$z_{\alpha/2}$=1.96. 规则：若$|z| > |z_{\alpha/2}|$, 则z的值位于拒绝域，拒绝H_0;

  这里**Z=2.68**, 在拒绝域，所以**拒绝H_0**

用置信区间进行假设检验:

- 已知 $X \sim N(\mu, 10^2)$，N=25, $1-\alpha = 95\%$，$Z_{\alpha/2}$=1.96，$\bar{x}$=105.36。由于是正态总体，且方差已知，总体均值μ在$1-\alpha$置信水平下的置信区间为

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 105.36 \pm 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{25}} \\ &= 105.36 \pm 3.92 \\ &= (101.44, 109.28)\end{aligned}$$



- 由于原假设的值100没有落入置信区间，
- 所以**拒绝Ho**

- 这个例子表明：在进行区间估计时，如果总体参数没有落在置信区间里，在进行参数假设检验时，检验统计量的值会落在拒绝域内，从而拒绝原假设。

- 用置信区间进行检验时，好处是可以同时对几个统计量进行检验。
- 例如，从三批这样的食品中分别抽取随机样本，测得平均重量分别为 100，105，110，问这三批食品是否与规定标准100克有无差别？
- 由以上讨论，此问题十分简单，根据置信区间（101.44，109.28）判断，若样本均值落入置信区间，则认为食品与规定标准无显著差别，否则便认为有显著差别。

区间估计与参数假设检验的联系

- (1) 在区间估计中用到的枢轴量和在参数假设检验中用到的检验统计量本质上是同一个函数，选择标准也完全相同。
- (2)在区间估计中置信水平与参数假设检验中显著性水平具有对偶关系，而区间估计中置信区间与参数假设检验中的不拒绝域完全相同。
- (3)区间估计与参数假设检验所得结论完全相同。

① $H_0: \mu=\mu_0$ 设总体标准差已知 $Z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

为什么是双侧检验？

$\bar{x}-\mu_0$

$\mu-\mu_0$

② $H_0: \mu \le \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$ ⟶

$\mu \le \mu_0$

$-\mu \ge -\mu_0$

为什么是右单侧检验？

③ $H_0: \mu \ge \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$ ⟵ $Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

为什么是左单侧检验？