管理运筹学

第四章 线性规划在工商管理中的应用

北京理工大学 韩伯棠 教授

第四章

线性规划在工商管理中的应用

在对线性规划的求解及灵敏度分析的基本概念、基本原理有所了解之后，我们来研究线性规划在工商管理中的应用，解决工商管理中的实际问题。

本章内容

1. 人力资源分配的问题
2. 生产计划的问题
3. 套裁下料问题
4. 配料问题
5. 投资问题

本章内容

1. 人力资源分配的问题
2. 生产计划的问题
3. 套裁下料问题
4. 配料问题
5. 投资问题

§1 人力资源分配的问题

例1．某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务人员数如下：

班次	时间	所需人数
1	6:00--10:00	60
2	10:00--14:00	70
3	14:00--18:00	60
4	18:00--22:00	50
5	22:00--2:00	20
6	2:00--6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间段开始时上班，并连续工作八小时，问该公交线路应怎样安排司机和乘务人员，既能满足工作需要，又使配备司机和乘务人员的人数最少？

§1 人力资源分配的问题

解：设 x_i 表示第i班次时开始上班的司机和乘务人员人数，建立如下的数学模型：

目标函数：Min $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

约束条件：

$$x_1 + x_6 \geqslant 60 \text{（班次1所需人数）}$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 70$$
$$x_2 + x_3 \geqslant 60$$
$$x_3 + x_4 \geqslant 50$$
$$x_4 + x_5 \geqslant 20$$
$$x_5 + x_6 \geqslant 30$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$$

§1 人力资源分配的问题

例2. 百货商场对售货员的需求如下表。要求售货员每周工作五天，连续休息两天。问：应该如何安排售货员，满足工作需要，同时使配备的售货员人数最少？

时间	所需售货员人数
星期一	15
星期二	24
星期三	25
星期四	19
星期五	31
星期六	28
星期日	28

§1 人力资源分配的问题

解：设 x_i（$i = 1, 2, \cdots, 7$）表示星期i开始休息的人数，
建立如下的数学模型：

目标函数：$\text{Min } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件：

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 15$（星期一所需售货员人数）

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 24$

$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geqslant 25$

$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geqslant 19$

$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 31$

$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 28$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 28$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0$

§1 人力资源分配的问题

注意：

实际中，服务行业企业一周内对人力资源的需求往往像例2所描述的方式变化，而每天各时间段的需求又像例1所描述的那样变化。

我们只要用例1的方法，分别求出周一到周六、周日每天的人员需求，再用例2的方法，即可求出该公司的最小编制。

本章内容

1. 人力资源分配的问题
2. 生产计划的问题
3. 套裁下料问题
4. 配料问题
5. 投资问题

§2 生产计划的问题

例3．公司面临外包协作、自行生产的问题。甲、乙、丙产品都需要经过铸造、机加工和装配三道工序。铸造工序中甲、乙可外包，亦可自产，丙必须自产，其余工序必须本厂完成。

问：为获取最大利润，三种产品各生产多少件？甲、乙的铸件有多少由本公司铸造？有多少由外包协作？

	甲	乙	丙	资源限制
每件铸造工时/小时	5	10	7	8000
每件机械加工工时/小时	6	4	8	12000
每件装配工时/小时	3	2	2	10000
自行生产铸件每件成本/元	3	5	4	
外包协作铸件每件成本/元	5	6	--	
机械加工每件成本/元	2	1	3	
装配每件成本/元	3	2	2	
每件产品售价/元	23	18	16	

§2 生产计划的问题

解：设 x_1, x_2, x_3 分别为三道工序都由本公司加工的甲、乙、丙三种产品的件数，x_4，x_5 分别为由外协铸造再由本公司加工和装配的甲、乙两种产品的件数。

求x_i 的利润：利润 = 售价 - 各成本之和；

产品甲全部自制的利润 =23-(3+2+3)=15；

产品甲铸造外协，其余自制的利润 =23-(5+2+3)=13；

产品乙全部自制的利润 =18-(5+1+2)=10；

产品乙铸造外协，其余自制的利润 =18-(6+1+2)=9；

产品丙的利润 =16-(4+3+2)=7；

可得到x_i, i = 1,2,3,4,5 的利润分别为 15、10、7、13、9元。

§2 生产计划的问题

通过以上分析，可建立如下的数学模型：

目标函数：Max $15x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 13x_4 + 9x_5$

约束条件：

$5x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leqslant 8000$（铸造工时）

$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leqslant 12000$ （机械加工工时）

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leqslant 10000$ （装配工时）

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

§2 生产计划的问题

例4．机械厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ产品，均要经过A、B两道工序。两种规格的设备A_1、A_2能完成 A 工序；三种规格的设备B_1、B_2、B_3能完成 B 工序。Ⅰ可在A、B的任何规格的设备上加工；Ⅱ 可在任意规格的A上加工，B工序只能在B_1上加工；Ⅲ只能在A_2与B_2上加工。

问：为获得最大利润，应如何制定最优的产品加工方案？

设备	产品单件工时			设备的有效台时	满负荷时的设备费用
	I	II	III		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12	10000	321
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11	7000	783
B_3	7			4000	200
原料（元/件）	0.25	0.35	0.50		
售价（元/件）	1.25	2.00	2.80		

§2 生产计划的问题

解：设x_{ijk}表示产品 i 在工序 j （工序 A 用 1 表示，工序 B 用 2 表示）的设备 k 上加工的数量，建立如下的数学模型：

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{aligned}
&5x_{111} + 10x_{211} \leqslant 6000 \quad &&（设备 A_1） \\
&7x_{112} + 9x_{212} + 12x_{312} \leqslant 10000 \quad &&（设备 A_2） \\
&6x_{121} + 8x_{221} \leqslant 4000 \quad &&（设备 B_1） \\
&4x_{122} + 11x_{322} \leqslant 7000 \quad &&（设备 B_2） \\
&7x_{123} \leqslant 4000 \quad &&（设备 B_3） \\
&x_{111} + x_{112} - x_{121} - x_{122} - x_{123} = 0 \quad &&（\text{I 产品在A、B工序加工的数量相等}） \\
&x_{211} + x_{212} - x_{221} = 0 \quad &&（\text{II 产品在A、B工序加工的数量相等}） \\
&x_{312} - x_{322} = 0 \quad &&（\text{III 产品在A、B工序加工的数量相等}） \\
&x_{ijk} \geqslant 0,\quad i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2,3
\end{aligned}
$$

§2 生产计划的问题

目标函数为计算利润最大化，利润的计算公式为：

利润 = [（销售单价-原料单价）* 产品件数]之和 -（每台时的设备费用*设备实际使用的总台时数）之和.

目标函数：$\text{Max } (1.25-0.25)(x_{111}+x_{112})+(2-0.35)(x_{211}+x_{212})+(2.80-0.5)x_{312} - 300/6000(5x_{111}+10x_{211})-321/10000(7x_{112}+9x_{212}+12x_{312})-250/4000(6x_{121}+8x_{221})-783/7000(4x_{122}+11x_{322})-200/4000(7x_{123}).$

整理得：$\text{Max } 0.75x_{111}+0.7753x_{112}+1.15x_{211}+1.3611x_{212}+1.9148x_{312}-0.375x_{121}-0.5x_{221}-0.4474x_{122}-1.2304x_{322}-0.35x_{123}$

§2 生产计划的问题

需要注意的问题：

1. 合并同类项，自行完成；
2. 移项问题；
3. 变量下标的转换问题；

把变量设定中两维和三维下标将为一维；

例：x_{ijk}： $x_{111} \Rightarrow x_1$

$x_{112} \Rightarrow x_2$ 。。。

本章内容

1. 人力资源分配的问题
2. 生产计划的问题
3. 套裁下料问题
4. 配料问题
5. 投资问题

例5. 工厂要做100套钢架，每套用长为2.9 m,2.1 m,1.5 m的圆钢各一根。已知原料每根长7.4 m，问：应如何下料，可使所用原料最省？

解：列出所有可能下料方案：

	方案1	方案2	方案3	方案4	方案5	方案6	方案7	方案8
2.9m	1	2	0	1	0	1	0	0
2.1m	0	0	2	2	1	1	3	0
1.5m	3	1	2	0	3	1	0	4
合计/m	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6	6.5	6.3	6
料头/m	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4

§3 套裁下料问题

设按上述方案下料的原材料根数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 建立如下的数学模型：

目标函数：Min $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$

约束条件：

$$x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 \geqslant 100 \quad \text{（2.9m 圆钢）}$$

$$2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 \geqslant 100$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 + 4x_8 \geqslant 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0$$

§3 套裁下料问题

用“管理运筹学”软件计算得出最优下料方案：

按方案1下料30根；按方案2下料10根；按方案4下料50根。

即 $x_1=30$； $x_2=10$； $x_3=0$； $x_4=50$；$x_5= x_6= x_7= x_8= 0$；

只需90根原材料就可制造出100套钢架。

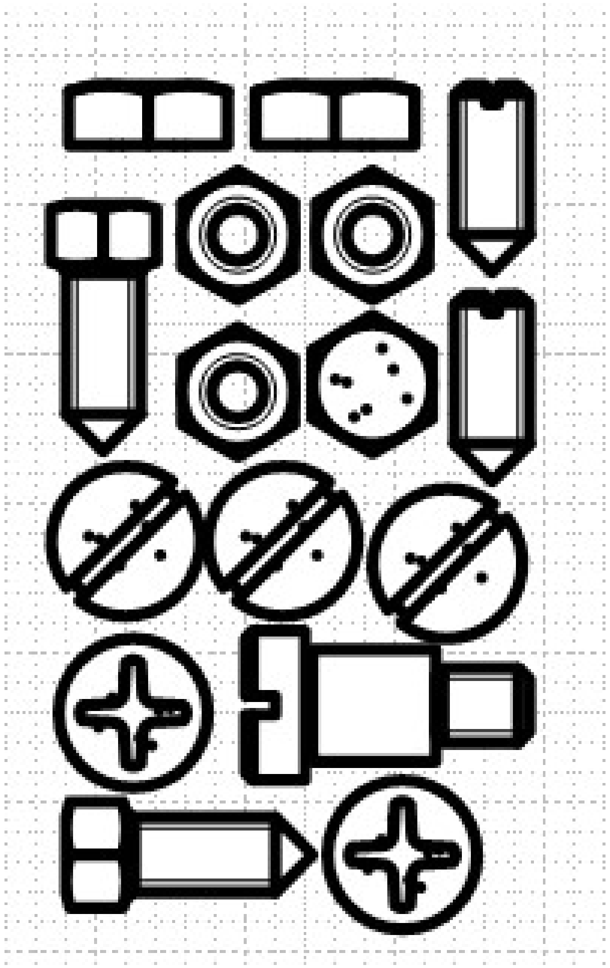
- 注意：建立此类型数学模型时，约束条件用大于等于号优于用等于号。

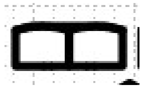
§3 套裁下料问题

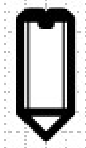
面裁问题如何解决？

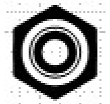
体裁问题又如何解决？

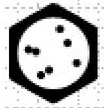
§3 套裁下料问题

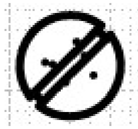


 零件1 x_1: 2件

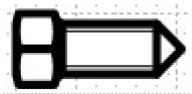
 零件2 x_2: 2件

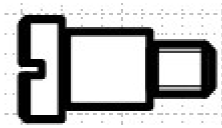
 零件3 x_3: 3件

 零件4 x_4: 1件

 零件5 x_5: 3件

 零件6 x_6: 2件

 零件7 x_7: 2件

 零件8 x_8: 1件

本章内容

1. 人力资源分配的问题
2. 生产计划的问题
3. 套裁下料问题
4. 配料问题
5. 投资问题

§4 配料问题

例6. 工厂要用三种原料1、2、3混合调配出不同规格的产品甲、乙、丙。
问：该厂应如何安排生产，使利润最大？

产品名称	规格要求	单价（元/kg）
甲	原材料1不少于50%，原材料2不超过25%	50
乙	原材料1不少于25%，原材料2不超过50%	35
丙	不限	25

原材料名称	每天最多供应量	单价（元/kg）
1	100	65
2	100	25
3	60	35

§4 配料问题

解：设 x_{ij} 表示第 i 种（我们分别用1,2,3表示产品甲、乙、丙）产品中原料 j 的含量。

建立数学模型时，要考虑：

甲产品的数量为： $x_{11}+x_{12}+x_{13}$；

乙产品的数量为： $x_{21}+x_{22}+x_{23}$；

丙产品的数量为： $x_{31}+x_{32}+x_{33}$；

原料1的总需求量为： $x_{11}+x_{21}+x_{31}$；

原料2的总需求量为： $x_{12}+x_{22}+x_{32}$；

原料3的总需求量为： $x_{13}+x_{23}+x_{33}$；

目标函数： 利润最大，利润 = 收入 - 原料支出

约束条件： 规格要求 4 个； 供应量限制 3 个。

§4 配料问题

- 利润=总收入-总成本=甲乙丙三种产品的销售单价*产品数量-甲乙丙使用的原料单价*原料数量，故有：

目标函数： $\text{Max } 50(x_{11}+x_{12}+x_{13})+35(x_{21}+x_{22}+x_{23})+25(x_{31}+x_{32}+x_{33})-65(x_{11}+x_{21}+x_{31})-25(x_{12}+x_{22}+x_{32})-35(x_{13}+x_{23}+x_{33})$

$= -15x_{11}+25x_{12}+15x_{13}-30x_{21}+10x_{22}-40x_{31}-10x_{33}$

约束条件： 从第1个表中有：

$x_{11} \geqslant 0.5(x_{11}+x_{12}+x_{13})$ （甲含原材料1的比例）

$x_{12} \leqslant 0.25(x_{11}+x_{12}+x_{13})$

$x_{21} \geqslant 0.25(x_{21}+x_{22}+x_{23})$

$x_{22} \leqslant 0.5(x_{21}+x_{22}+x_{23})$

§4 配料问题

从第2个表中，

生产甲乙丙的原材料不能超过原材料的供应限额，故有：

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31}) \leqslant 100 \quad \text{（原材料1的供应限额）}$$

$$(x_{12}+x_{22}+x_{32}) \leqslant 100$$

$$(x_{13}+x_{23}+x_{33}) \leqslant 60$$

§4 配料问题

通过整理，得到以下模型：

目标函数：$\text{Max } z = -15x_{11}+25x_{12}+15x_{13}-30x_{21}+10x_{22}-40x_{31}-10x_{33}$

约束条件：

$0.5\ x_{11}-0.5\ x_{12}-0.5\ x_{13} \geqslant 0$ （原材料1不少于50%）

$-0.25x_{11}+0.75x_{12}-0.25x_{13} \leqslant 0$ （原材料2不超过25%）

$0.75x_{21}-0.25x_{22}-0.25x_{23} \geqslant 0$ （原材料1不少于25%）

$-0.5\ x_{21}+0.5\ x_{22}-0.5\ x_{23} \leqslant 0$ （原材料2不超过50%）

$x_{11}+x_{21}+x_{31} \leqslant 100$ （供应量限制）

$x_{12}+x_{22}+x_{32} \leqslant 100$ （供应量限制）

$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leqslant 60$ （供应量限制）

$x_{ij} \geqslant 0,\ i=1,2,3;\ j=1,2,3$

§4 配料问题

例7. 汽油混合问题。

汽油的特性用“辛烷数”描述点火特性，用“蒸汽压力”描述挥发性。炼油厂有1、2、3、4种标准汽油，性能与库存信息如表1. 将这四种混合，可得到标号为1，2的两种飞机汽油，性能指标如表2。

问：如何根据库存情况适量混合各种标准汽油，既满足飞机汽油的性能指标，又使2号汽油满足需求，并使得1号汽油产量最高？

§4 配料问题

表1

标准汽油	辛烷数	蒸汽压力(g/cm^2)	库存量(L)
1	107.5	7.11×10^{-2}	380000
2	93.0	11.38×10^{-2}	265200
3	87.0	5.69×10^{-2}	408100
4	108.0	28.45×10^{-2}	130100

表2

飞机汽油	辛烷数	蒸汽压力(g/cm^2)	产量需求
1	不小于91	不大于9.96×10^{-2}	越多越好
2	不小于100	不大于9.96×10^{-2}	不少于250000

§4 配料问题

解：

设x_{ij}为飞机汽油i中所用标准汽油j的数量(L)。

目标函数为飞机汽油1的总产量越多越好

$$Max\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$$

库存量和产量约束为：
$$x_{11}+x_{21}\le 380000$$
$$x_{12}+x_{22}\le 265200$$
$$x_{13}+x_{23}\le 408100$$
$$x_{14}+x_{24}\le 130100$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\ge 250000$$

§4 配料问题

辛烷数和蒸汽压力的约束条件为：

由物理中的分压定律， $PV = \sum_{j=1}^{n} p_j v_j$ 可得有关蒸汽压力的约束条件：

$$2.85x_{11} - 1.42x_{12} + 4.27x_{13} - 18.49x_{14} \geq 0$$

$$2.85x_{21} - 1.42x_{22} + 4.27x_{23} - 18.49x_{24} \geq 0$$

辛烷数的约束条件为：

$$16.5x_{11} + 2.0x_{12} - 4.0x_{13} + 17.0x_{14} \geq 0$$

$$7.5x_{11} - 7.0x_{12} - 13.0x_{13} + 8.0x_{14} \geq 0$$

§4 配料问题

综上所述，得该问题的数学模型为：

$$\max \quad x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$$

$$\begin{cases}
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\geq 250000\\
x_{11}+x_{21}\leq 380000\\
x_{12}+x_{22}\leq 265200\\
x_{13}+x_{23}\leq 408100\\
x_{14}+x_{24}\leq 130100\\
2.85x_{11}-1.42x_{12}+4.27x_{13}-18.49x_{14}\geq 0\\
2.85x_{21}-1.42x_{22}+4.27x_{23}-18.49x_{24}\geq 0\\
16.5x_{11}-2x_{12}-4x_{13}+17x_{14}\geq 0\\
7.5x_{21}-7x_{22}-13x_{23}+8x_{24}\geq 0\\
x_{ij}\geq 0,(i=1,2;\ j=1,2,3,4)
\end{cases}$$

§4 配料问题

由管理运筹学软件求解得：

$$\max(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14})=933\,399.938$$
$$x_{11}=261966.078$$
$$x_{12}=265200$$
$$x_{13}=315672.219$$
$$x_{14}=90561.688$$
$$x_{21}=118033.906$$
$$x_{22}=0$$
$$x_{23}=92427.758$$
$$x_{24}=39538.309$$

本章内容

1. 人力资源分配的问题
2. 生产计划的问题
3. 套裁下料问题
4. 配料问题
5. 投资问题

§5 投资问题

例8. 现有资金200万元，今后五年内考虑给以下的项目投资。

项目*A*：从第一年到第五年每年年初都可投资，当年末能收回本利110%；

项目*B*：从第一年到第四年每年年初都可投资，次年末能收回本利125%，但规定每年最大投资额不能超过30万元；

项目*C*：需在第三年年初投资，第五年末能收回本利140%，但规定最大投资额不能超过80万元；

项目*D*：需在第二年年初投资，第五年末能收回本利155%，但规定最大投资额不能超过100万元。

§5 投资问题

据测定每万元每次投资的风险指数如表：

项目	风险指数（次/万元）
A	1
B	3
C	4
D	5.5

问：a）应如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年年末拥有资金的本利金额为最大？

b）应如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年年末拥有资金的本利在330万元的基础上使得其投资总的风险系数为最小？

§5 投资问题

解：1）确定决策变量：连续投资问题

设 x_{ij} 表示第 i 年初投资于A(j=1)、B(j=2)、C(j=3)、D(j=4)项目的金额。这样我们建立如下的决策变量：

A	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}
B	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	
C			x_{33}		
D		x_{24}			

2）约束条件：

第一年：A项目当年末可收回投资，故第一年年初应把全部资金投出去，于是 $x_{11}+x_{12}=200$；

第二年：B项目次年末才可收回投资，故第二年年初有资金1.1 x_{11}，于是 $x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11}$；

§5 投资问题

第三年：第三年年初的资金是从项目A第二年投资和项目B第一年投资所回收的本息总和 $1.1x_{21}+1.25x_{12}$，

于是 $x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12}$；

第四年：同上分析，年初有资金 $1.1x_{31}+1.25x_{22}$，

于是 $x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22}$；

第五年：同上分析，年初有资金 $1.1x_{41}+1.25x_{32}$，

于是 $x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32}$；

B、C、D的投资限制：

$$x_{i2}\leqslant 30 \quad (i=1、2、3、4)$$
$$x_{33}\leqslant 80$$
$$x_{24}\leqslant 100$$

§5 投资问题

3）目标函数及模型：

a) Max $z = 1.1x_{51} + 1.25x_{42} + 1.4x_{33} + 1.55x_{24}$

s.t. $x_{11} + x_{12} = 200$

$x_{21} + x_{22} + x_{24} = 1.1x_{11}$；

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1.1x_{21} + 1.25x_{12}$；

$x_{41} + x_{42} = 1.1x_{31} + 1.25x_{22}$；

$x_{51} = 1.1x_{41} + 1.25x_{32}$；

$x_{i2} \le 30$ (i =1、2、3、4)，$x_{33} \le 80$，$x_{24} \le 100$

$x_{ij} \ge 0$ （i = 1、2、3、4、5；j = 1、2、3、4）

b)所设变量与问题a相同，目标函数为风险最小，有

$$\text{Min } f = x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+3(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+4x_{33}+5.5x_{24}$$

§5 投资问题

即在问题a的约束条件中加上“第五年末拥有资金本利在330万元”的条件，得模型：

$$\text{Min}\ \ f=(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51})+3(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+4x_{33}+5.5x_{24}$$

$$\text{s.t.}\ x_{11}+x_{12}=200$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11};$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12};$$

$$x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22};$$

$$x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32};$$

$$x_{i2}\le 30\ (i=1、2、3、4),\ x_{33}\le 80,\ x_{24}\le 100$$

$$\mathbf{1.1x_{51}+1.25x_{42}+1.4x_{33}+1.55x_{24}\ge 330}$$

$$x_{ij}\ge 0\ (i=1、2、3、4、5;\ j=1、2、3、4)$$

谢 谢！