管理运筹学

第二章 线性规划图解法

北京理工大学 韩伯棠 教授

第二章 线性规划的图解法

线性规划是运筹学一个重要分支

管理上的典型应用：

典型线性规划应用	应用场景
合理利用线材问题	用料最少
配料问题	获利最大
投资问题	投资回报最大的方案
产品生产计划	合理利用人力、物力、财力等使获利最大
劳动力安排	用最少的劳动力满足需要
运输问题	总运费最少

线性规划的组成：

	线性规划的组成
1	目标函数：MIN/MAX
2	约束条件：限制条件
3	决策变量：可控因素

本章内容

1. 线性规划问题的提出
2. 线性规划的图解法
3. 图解法的灵敏度分析

§1 线性规划问题的提出

例1. 某工厂在计划期内要安排Ⅰ、Ⅱ两种产品的生产，生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗以及资源的限制，如下表所示。

资源	产品Ⅰ	产品Ⅱ	资源限制
设备	1	1	300台时
原料A	2	1	400kg
原料B	0	1	250kg
单位产品获利（元）	50	100	

问：工厂应分别生产多少单位Ⅰ、Ⅱ产品才能使工厂获利最多？

§1 线性规划问题的提出

问：工厂应分别生产多少单位Ⅰ、Ⅱ产品才能使工厂获利最多？

建立线性规划模型(设工厂分别生产 x_1， x_2 单位Ⅰ、Ⅱ产品)

资源	产品 Ⅰ	产品 Ⅱ	资源限制
设备	1	1	300台时
原料A	2	1	400kg
原料B	0	1	250kg
单位产品获利（元）	50	100	

目标函数： $\max \quad z = 50x_1 + 100x_2$

约束条件： $x_1 + x_2 \le 300$

$2x_1 + x_2 \le 400$

$x_2 \le 250$

$x_1, x_2 \ge 0$

§1 线性规划问题的提出

建模过程

步骤	建立线性规划模型
1	在什么条件下追求什么目标
2	定义决策变量表，每组$(x_1, x_2, \dots, x_n)$代表一个方案
3	用决策变量的线性函数形式写出目标函数
4	必须遵循的约束条件

§1 线性规划问题的提出

模型一般形式

目标函数： max (min) z = $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

约束条件：

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le (=, \ge)\ b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le (=, \ge)\ b_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le (=, \ge)\ b_m$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

本章内容

1 问题的提出

2 图解法

3 图解法的灵敏度分析

§2 图解法

两个决策变量的线性问题，可以用图解法求解。

例1

目标函数：

$$\max \quad z = 50x_1 + 100x_2$$

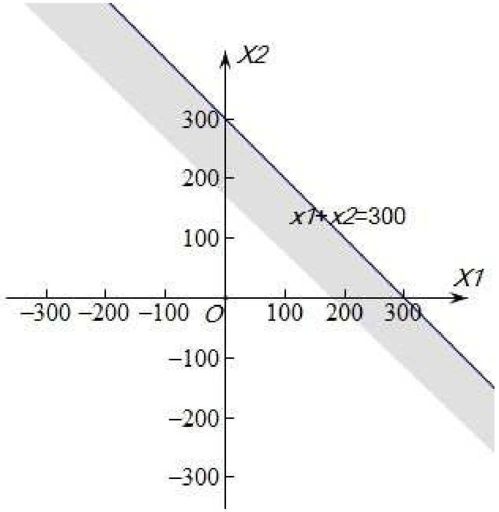
约束条件：

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 300 \\
2x_1 + x_2 &\le 400 \\
x_2 &\le 250 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

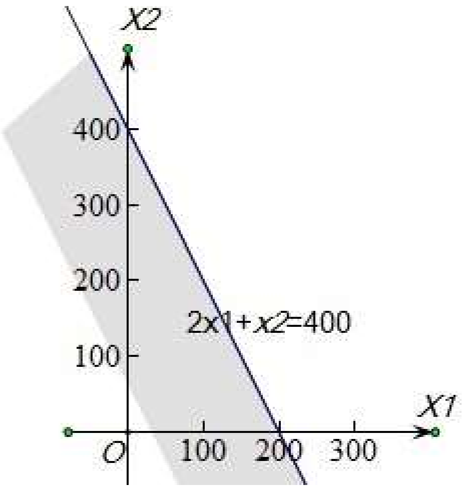
§ 2 图解法

每个约束条件都代表一个半平面。

$$x_1 + x_2 \le 300$$



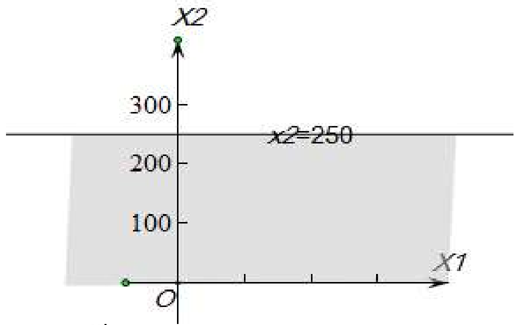
$$2x_1 + x_2 \le 400$$



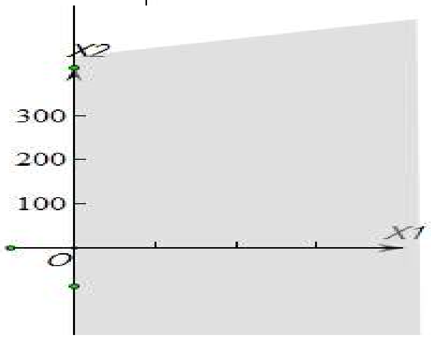
§2 图解法

每个约束条件都代表一个半平面。

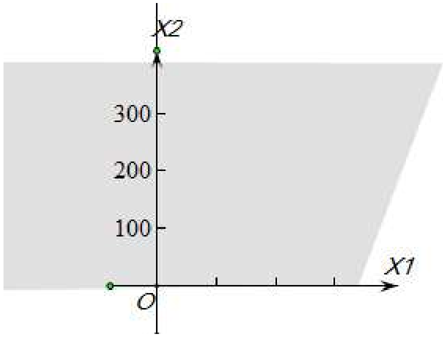
$x_2 \leq 250$



$x_1 \geq 0$

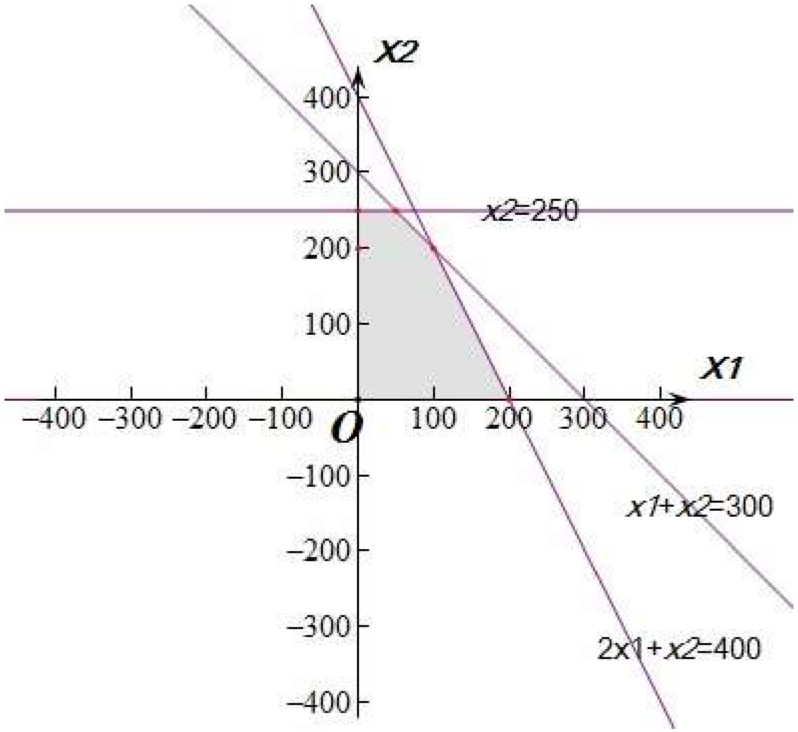


$x_2 \geq 0$



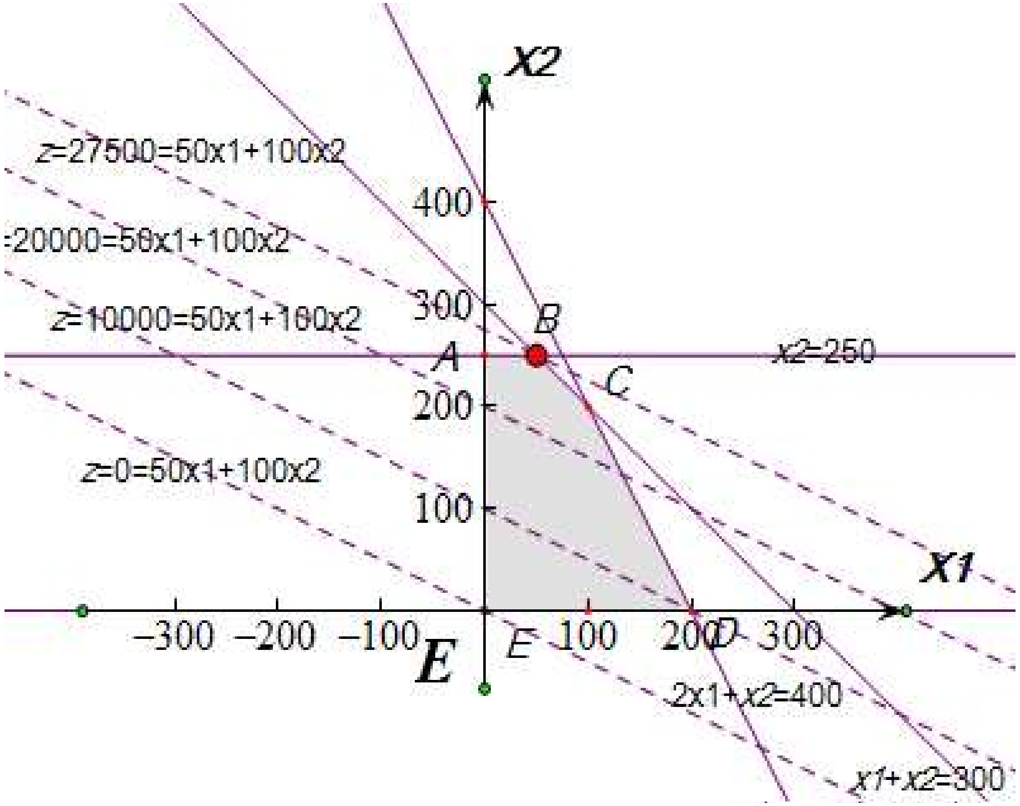
§ 2 图解法

把五个限制条件对应的五个半平面合并成一个图，各约束条件的公共部分即为可行域。



§ 2 图解法

目标函数 $z = 50x_1 + 100x_2$，当 z 取某一固定值时得到一条直线，直线上的每一点都具有相同的目标函数值，称之为“等值线”。



得到最优解：

B：x_1=50,x_2=250

最优目标值

z=27500

§2 图解法

重要结论

解的情况	场景
有最优解	一定有一个可行域的顶点，对应一个最优点
无穷多个最优解	若将例一中的目标函数变为$z=50x_1+50x_2$，则线段BC上的所有点都代表最优解
无可行解	可行域为空域，不存在满足约束条件的解
无界解	可行域的范围延伸到无穷远，目标函数值可以无穷大或无穷小

§2 图解法

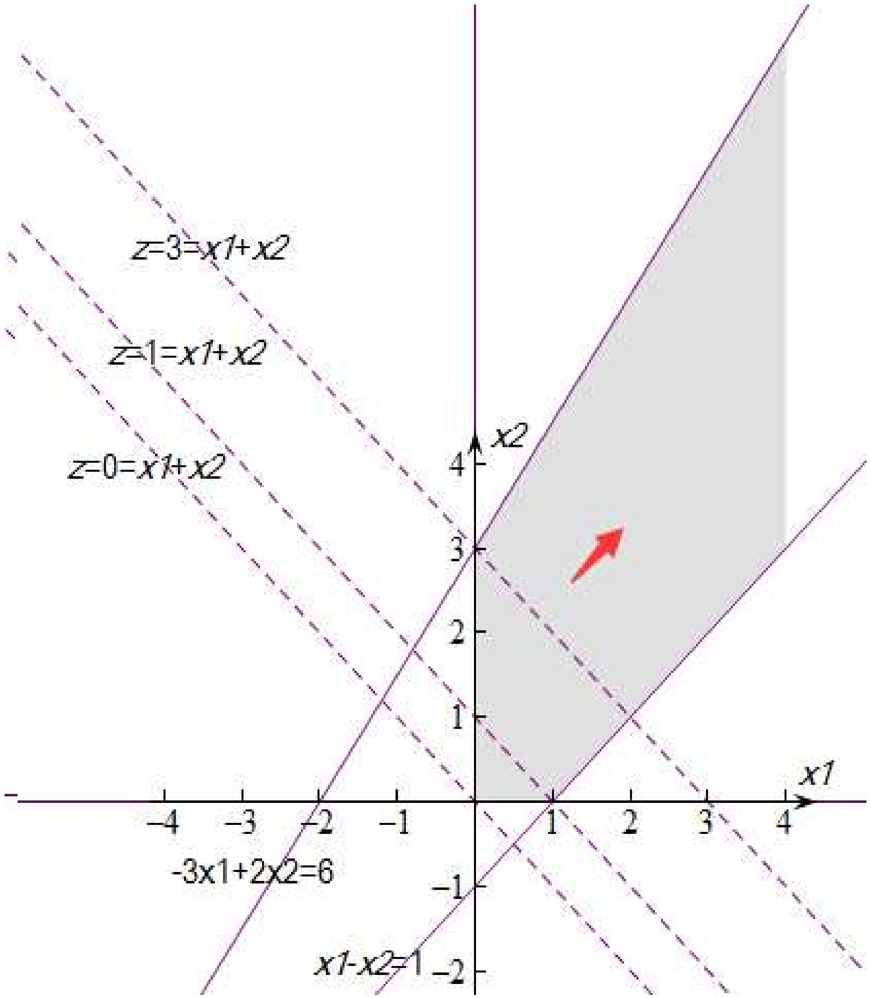
重要结论——无界解（无最优解的情况）

目标函数：$\max z = x_1 + x_2$；

约束条件：$x_1 - x_2 \le 1$

$-3x_1 + 2x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$



该问题可行域无界，目标函数值无穷大，无界解，即无最优解。

§2 图解法

求目标函数最小化的线性规划问题

例2 某公司由于生产需要，共需A,B两种原料至少350吨（A，B有一定替代性）限制条件具体如下：

	资源需求	加工时间（小时/吨）	成本（万元/吨）
A	≥125吨	2	2
B	无限制	1	3
总资源需求	（A+B）需求≥350吨		
时间限制（小时）	600		

试问在满足生产需要的前提下，在公司加工能力的范围内，如何购买 A，B 两种原料，使得购进成本最低？

§ 2 图解法

建立模型：

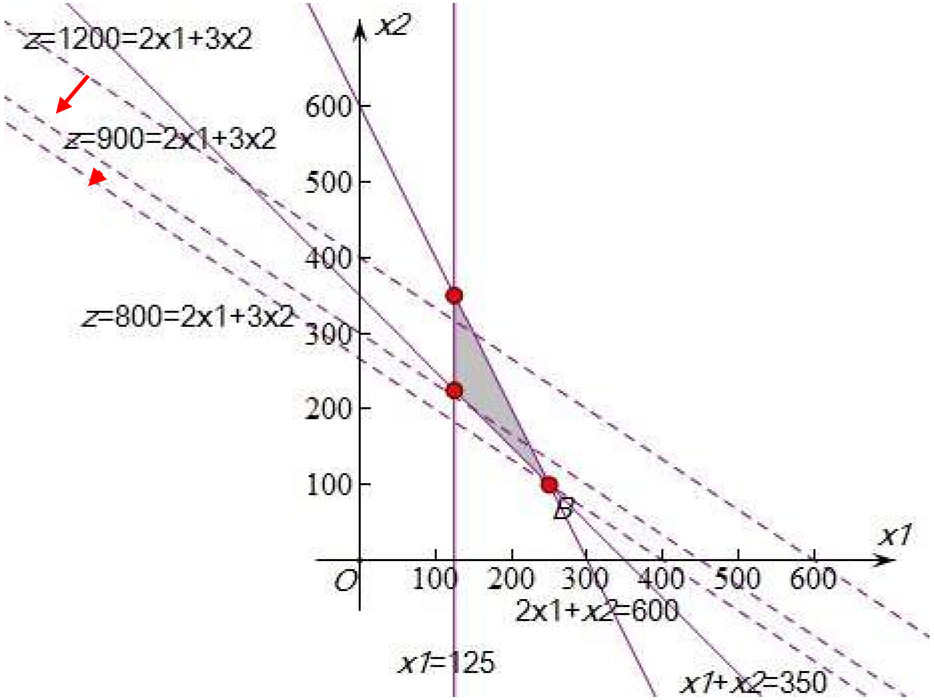
目标函数：$\min f = 2x_1 + 3x_2$

约束条件：$x_1 + x_2 \geq 350$

$x_1 \geq 125$

$2x_1 + x_2 \leq 600$

$x_1 , x_2 \geq 0$



得 B 点坐标（250，100）为最优解

本章内容

1 问题的提出

2 图解法

3 图解法的灵敏度分析

§3 图解法的灵敏度分析

线性规划的标准化

一般形式

目标函数：max（min）z = $c_1\ x_1 + c_2\ x_2 + \cdots + c_n\ x_n$

约束条件：

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n\ \le (=, \ge)\ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n\ \le (=, \ge)\ b_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n\ \le (=, \ge)\ b_m$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\ \ge 0$$

§3 图解法的灵敏度分析

线性规划的标准化

标准形式

目标函数：$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

约束条件：

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \; b_i \geq 0$$

§3 图解法的灵敏度分析

非标准形式的线性规划问题，通过变换转化为标准形式。

标准形式的线性规划的四大特点

	线性规划标准形式的四个特点
1	目标最大化
2	约束为等式
3	决策变量均非负
4	右端项非负

§3 图解法的灵敏度分析

极小化目标函数的标准化问题

设目标函数为：min f = $c_1\ x_1 + c_2\ x_2 + \ldots + c_n\ x_n$

令 z = −f，则该极小化问题与下面的极大化问题

max z = $-c_1\ x_1 - c_2\ x_2 - \ldots - c_n\ x_n$有相同的最优解，

注意：以上两个问题的最优解相同，但最优值相差一个负号，即min f = − max z

§3 图解法的灵敏度分析

约束条件不是等式的标准化问题

引入一个非负变量s，令其等于等式左右两边的差值

约束条件：$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}\ x_n \le b_i$

标准化：$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}\ x_n + s_i = b_i$

约束条件：$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}\ x_n \ge b_i$

标准化：$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}\ x_n - s_i = b_i$

§ 3 图解法的灵敏度分析

$\boldsymbol{b_i}$为负值的标准化问题

当 $\boldsymbol{b_i} < 0$，等式约束两端同时乘以-1，得到：

$$-\boldsymbol{a_{i1}}\ \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{a_{i2}}\boldsymbol{x_2} - \ldots - \boldsymbol{a_{in}}\ \boldsymbol{x_n} = -\ \boldsymbol{b_i}$$

§ 3 图解法的灵敏度分析

例3.

$$\min \quad f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

s. t. $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 6$

$$2x_1 + x_3 \geq 8$$

$$x_{1+}x_2 + x_3 = -9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

§ 3 图解法的灵敏度分析

通过标准化得：

$$\max \quad z = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3$$

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_1 + x_3 - x_5 = 8$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 9$$

$$x_1, x_2, \boldsymbol{x_3}, x_4, x_5 \geq 0$$

§3 图解法的灵敏度分析

* 变量无符号限制的标准化问题

当某一个变量 x_j 没有非负约束

令 $x_j = x_j' - x_j''$，其中 $x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$，

x_j 的符号取决于 x_j' 和 x_j'' 的大小。

§3 图解法的灵敏度分析

灵敏度分析：研究线性规划的一个或多个参数（系数）c_i, a_{ij}, b_j 变化时，对最优解产生的影响。

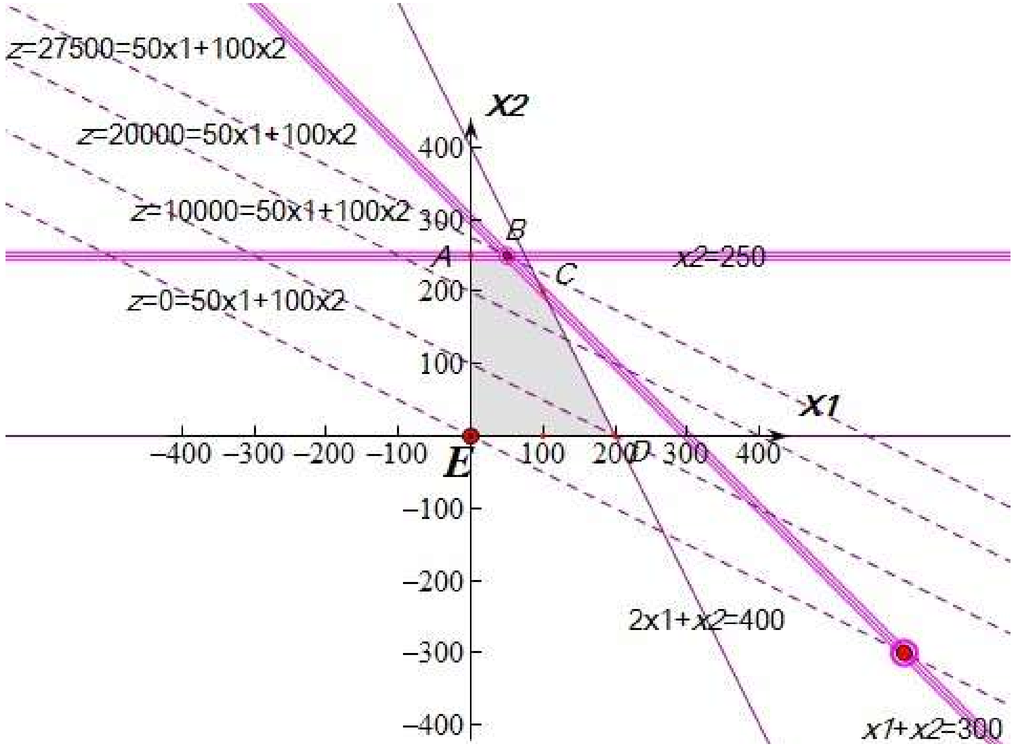
一、目标函数中的系数c_i的灵敏度分析

考虑例1 的情况，

目标函数 $z = 50\ x_1 + 100\ x_2$ 斜线在右图两条红线之间

$, -1 \le \left(-c_1/c_2 \right) \le 0$

最优解不变，仍为B.



§3 图解法的灵敏度分析

等值线斜率在$-1 \le (-c_1/c_2) \le 0$ 范围内则最优值不变。

- 假设产品 II 的利润 100 元不变，即 $c_2 = 100$不变，代入$-1 \le (-c_1/c_2) \le 0$得到$0 \le c_1 \le 100$
- 假设产品 I 的利润50元不变，即 $c_1 = 50$，代入$-1 \le (-c_1/c_2) \le 0$ 得到 $50 \le c_2$。
- * 假若产品 I 、II 的利润均改变，可直接用变化后的等值线斜率来判断最优值是否变化。

§ 3 图解法的灵敏度分析

二、约束条件中常数项b_j的灵敏度分析

b_j变化，线性规划的可行域变化，可能引起最优解变化

例1：

b_1从$300 \rightarrow 310$

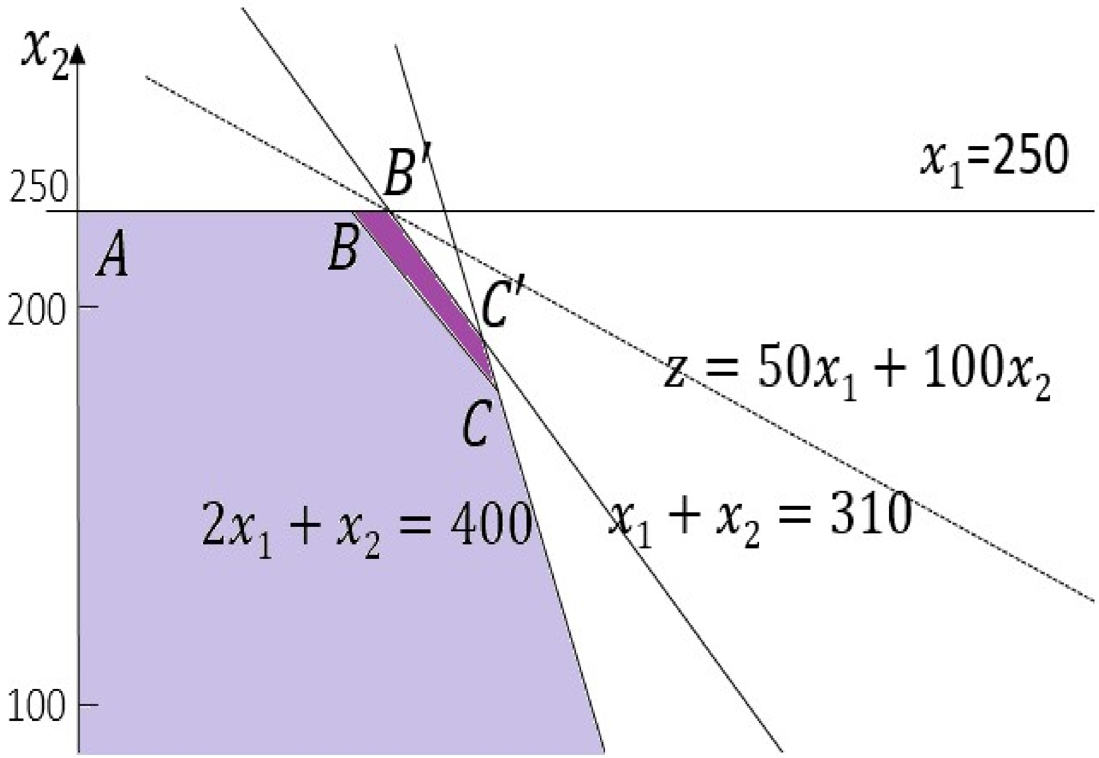
最优解

$\mathrm{B}(50,250) \rightarrow \mathrm{B}'(60,250)$

最优值为$27500 \rightarrow 28000$

台时设备↑10个

利润↑500元

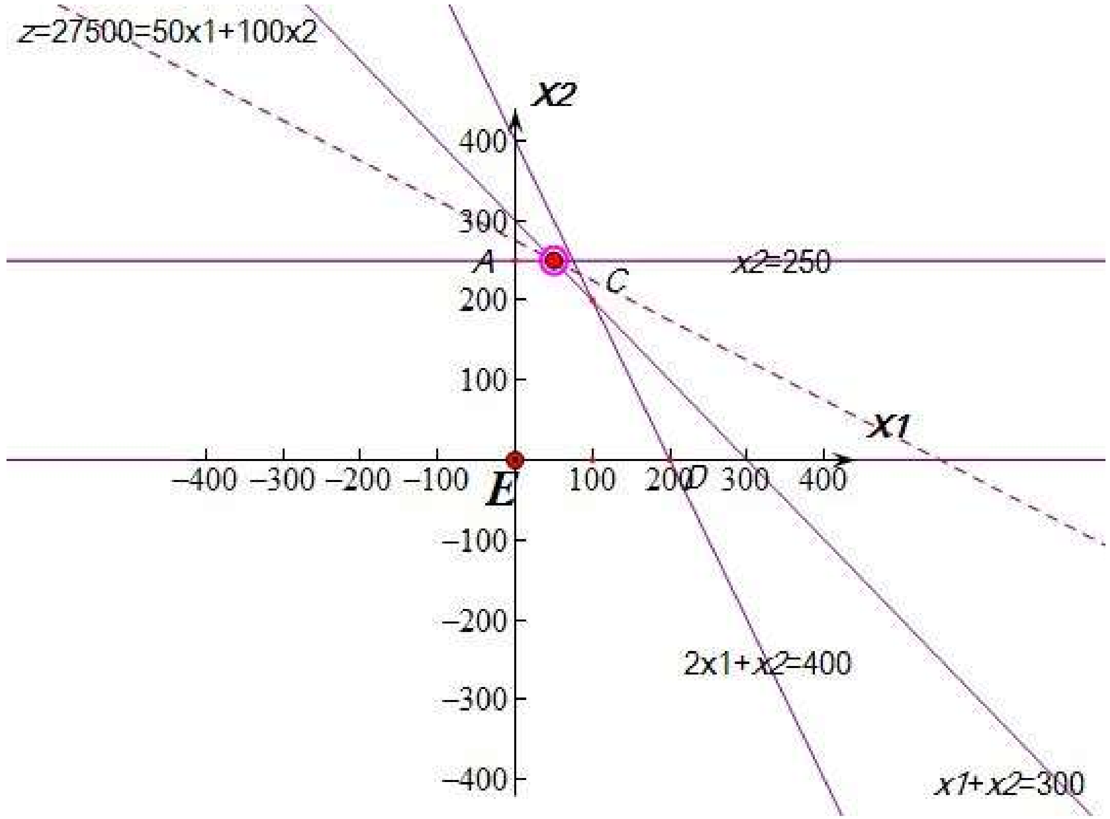


§ 3 图解法的灵敏度分析

在一定范围内，台时设备能力每↑1，利润↑50元，50即第一个约束条件的对偶价格

如 b_2从$400 \to 410$，最优解不变，最优值没有改进，第二个约束条件对偶价格为0

原松弛变量$S_2 = 50$，当b_2↑10，只增加了库存，S_2变成60，并不增加利润。最优解不变



§3 图解法的灵敏度分析

对偶价格

在一定范围内，当约束条件中常数项增加 1 个单位时，

（1）对偶价格大于 0，则其最优目标函数值得到改善，求Max则函数值增大，求min则函数值变小；

（2）对偶价格小于 0，则其最优目标函数值受到影响（变坏），求Max则函数值变小，求min则函数值增大；

（3）对偶价格等于 0，则其最优目标函数值不变。

谢 谢！