

任意两非共轴平行圆线圈间互感系数的分析

吴振飞, 宋开宏, 吴先球

(安徽大学 电子信息工程学院, 安徽 合肥 230601)

摘要 基于圆环线圈的电磁感应传感器是常用的一种传感器,其是通过互感的变化实现测量的一种装置。文中针对非共轴圆环线圈系统,运用纽曼积分公式和 Grover 公式,分析了任意两非共轴圆形平行线圈间的互感随两线圈平面间的距离、两线圈半径及两线圈轴间距离的变化规律,并由磁感线方程绘制出了其磁感线的分布图,从而在物理上直观验证了互感系数的大小。仿真结果验证了公式的正确性,并为电磁感应传感器的设计和优化提供了依据。

关键词 互感系数;非共轴圆形线圈;Grover 公式;纽曼积分公式;磁感线

中图分类号 TP212 **文献标识码** A **文章编号** 1007-7820(2017)01-065-04

Any of the Two Non Coaxial Circular Coils of Mutual Inductance Coefficient

WU Zhenfei, SONG Kaihong, WU Xianqiu

(School of Electronics and Information Engineering, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract Electromagnetic induction sensor based on circular coils is a common one, which is an apparatus to measure by variety of the mutual inductance. The change law of the mutual inductance is discussed in detail by Neumann integral formula and Grover's formula for any two non-coaxial circular coils, the numerical results show that the distance between plans of coils, the radius of the two coils and the distance between axes can lead to a varying mutual inductance. The magnetic induction line is drawn by the equation of the magnetic induction line to understand intuitively the size of mutual inductance in physics. Simulation results show the correctness of formulas and provide basis for design and optimization of the electromagnetic induction sensors.

Keywords mutual inductance; non-coaxial circular coils; Grover's formula; Neumann integral formula; magnetic induction line

基于圆形线圈的电磁感应传感器是常用的一种传感器^[1],这种电磁感应传感器在各种电磁感应系统领域中有着广泛的应用,如金属探测仪^[2]、生物医学植入传感器^[3]、感应耦合非接触能量传输系统^[4-5]以及射频识别^[6]等领域。这种电磁感应传感器是通过互感的变化实现测量的一种装置,通常由两组线圈组成,分别称为主线圈和子线圈,两个线圈之间的互感将确定子线圈的感应电流和感应电动势,互感系数不仅与线圈的几何形状、尺寸、匝数及周围媒质有关,且与线圈的相对位置有关^[7]。人们对于共轴圆线圈的互感系数的分析与计算^[8]以及磁感应强度^[9]的分布已作了大量的研究,其精确性能满足实际工程设计要求。然而

在实际问题中,电磁感应传感器的主线圈和子线圈通常不共轴,因此非共轴线圈情况下互感系数的计算与分析及周围空间磁场强度分布^[10]对感应型电磁传感器的设计和优化尤其重要,其是确定电磁感应传感器有效性和灵敏度的主要因素。本文根据纽曼积分公式和 Grover 公式,讨论了圆形线圈平面间的距离、圆形线圈半径的大小、两线圈轴之间的距离对互感系数的影响,并绘制出了非共轴线圈在水平偏移距离下的磁感线分布图,这为感应型电磁传感器^[11]的设计和优化奠定了理论基础。

1 纽曼积分公式

设有两个单匝细导线回路,如图 1 所示。回路 l_1 中通有电流 I_1 ,则其在回路 l_2 上任意一点 p 处产生的矢量磁位为 A_{21} ,通有电流 I_1 的回路 l_1 在回路 l_2 上产生的磁链 ψ_{21} 为

$$\psi_{21} = \oint_{l_2} A_{21} \times dl_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{I_1 dl_1 \cdot dl_2}{R} \quad (1)$$

收稿日期:2016-06-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51277001);安徽大学科研训练计划基金资助项目(kyxl2013031)

作者简介:吴振飞(1993-),男,硕士研究生。研究方向:电磁兼容与电磁耦合。宋开宏(1969-),男,副教授,硕士生导师。研究方向:天线的分析与设计。

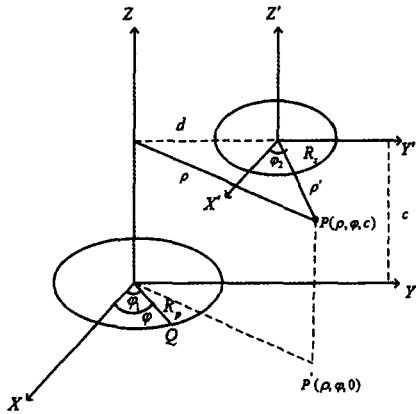


图1 横向偏移具有平行轴两圆环线圈结构

根据定义,任意两闭合线圈之间的互感^[7]可表示为

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_p R_s \cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2}{R} \quad (2)$$

式(2)即为纽曼积分公式,其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-1} \text{ H/m}$ 为真空中的磁导率; R 为源点 Q 与场点 P 之间的距离; R_p, R_s 分别为主线圈和子线圈的半径; d 为两个线圈轴之间的距离; c 为两线圈所在平面之间的距离。

2 非共轴圆线圈互感系数的 Grover 公式

Grover 根据纽曼积分公式推导出任意位置下的互感计算公式^[12],称为 Grover 公式。文献[13]从矢量磁位出发得到的互感计算公式与 Grover 公式完全一致,表明 Grover 公式的正确性。任意两非共轴圆形线圈之间互感系数的 Grover 公式为

$$M_{21} = \frac{2\mu_0 \sqrt{R_s R_p}}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \frac{d}{R_s} \cos\varphi}{k \sqrt{V^3}} \Psi(k) d\varphi \quad (3)$$

式中

$$\alpha = \frac{R_s}{R_p}, \beta = \frac{c}{R_p}, V = \sqrt{1 + \frac{d^2}{R_s^2} - 2 \frac{d}{R_s} \cos\varphi} \quad (4)$$

$$k^2 = \frac{4\alpha V}{(1 + \alpha V)^2 + \beta^2}, \Psi(k) = \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) F(k) - E(k) \quad (5)$$

其中, k 为模数, $F(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分^[14]

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}, E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (6)$$

3 非共轴线圈的场分布

对于图1所示的任意非共轴圆线圈系统,在柱坐

标系中,由文献[9]可知,系统的磁感线应满足方程

$$\rho A_\varphi^1 + \rho' A_\varphi^2 = C \quad (7)$$

式中, ρ, ρ' 分别为点 P 到主线圈、子线圈的轴线距离; A_φ^1, A_φ^2 分别为主线圈、子线圈在空间任一点 P 处的矢量磁位。根据文献[9]并归一化,式(7)变为

$$\frac{I_1}{k_1} \sqrt{\frac{\rho}{R_p}} \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2}\right) F(k_1) - E(k_1) \right] + \frac{I_2}{k_2} \sqrt{\frac{R_s \rho'}{R_p R_p}} \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2}\right) F(k_2) - E(k_2) \right] = \frac{C'}{R_p} \quad (8)$$

其中,

$$k_1^2 = \frac{4 \frac{\rho}{R_p}}{\left(\frac{\rho}{R_p} + 1\right) + \left(\frac{z}{R_p}\right)^2}, k_2^2 = \frac{4 \frac{R_s \rho'}{R_p R_p}}{\left(\frac{\rho'}{R_p} + \frac{R_s}{R_p}\right) + \left(\frac{z}{R_p} - \frac{c}{R_p}\right)^2}$$

4 计算结果与讨论

4.1 Grover 公式的正确性验证

以文献[8]中的例子来验证 Grover 公式的正确性,主线圈的半径 $R_p = 15.24 \text{ cm}$,子线圈的半径 $R_s = 15.24 \text{ cm}$,两线圈共面 $c = 0 \text{ cm}$,将计算结果如表1所示。

表1 Grover 公式与诺依曼公式的计算结果比较

横向偏移 d/cm	文献[8]:PI82/ μH	诺依曼公式/ μH	Grover 公式/ μH
45.72	-0.007 566	-0.007 580	-0.007 623
30.480 001	-0.087 62	-0.089 20	-0.089 66
7.62	0.2695	0.269 5	0.268 8

由表1可知,Grover 公式与诺依曼公式及参考文献[8]的计算结果基本一致,验证了 Grover 公式的正确性,但诺依曼公式为双重积分,而 Grover 公式为单重积分,因此对于具有一定厚度和长度的圆形线圈,Grover 公式计算互感的效率更高。

4.2 几何参数对互感系数的影响

为了研究线圈的尺寸和位置对互感系数的影响,对式(3)作无量纲化处理,令 $M_0 = 2 \mu_0 / \pi$,主线圈的半径 $R_p = 1.0 \text{ m}$ 。研究两线圈的互感系数随两线圈平面距离 $d/R_p = 0.4$ 的变化,图2给出了两线圈轴距 $R_s/R_p = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 的情况下,两线圈的半径比时互感系数的变化。由图2可知,在偏移距离 d 一定时,两线圈平面垂直距离越小,互感系数越大,并在两线圈共面时达到最大值。

讨论轴间距离对互感系数的影响,以 $R_s R_p = 1.0$ 为例,在 $c/R_p = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ 时,互感系数随轴间距离的变化如图3所示。当轴间距离较小时,互感为正;当轴间距离超过某一值时,互感将变为负号,因子线圈偏移一定距离后穿过子线圈的总磁通量的方向发生了变化;同时表明在偏移距离 d 一定时,互感系数的绝对大小随两线圈平面距离的增大而减小。

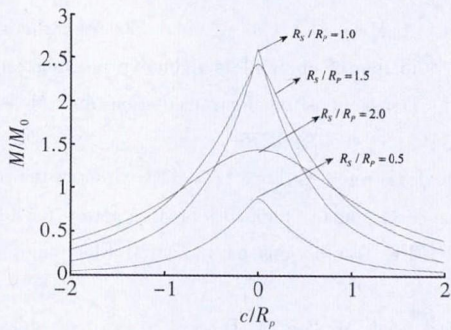


图2 互感系数与垂直距离的关系

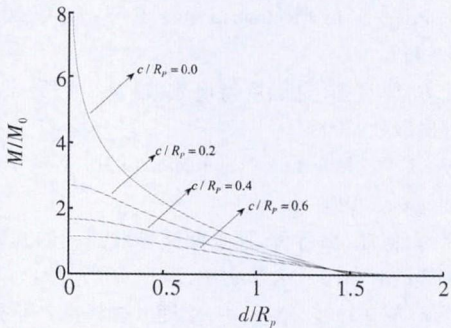


图3 互感系数与偏移距离的关系

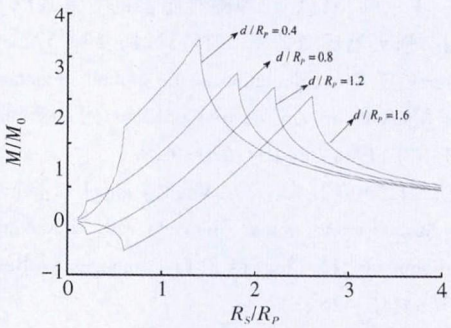


图4 互感系数与线圈尺寸的关系

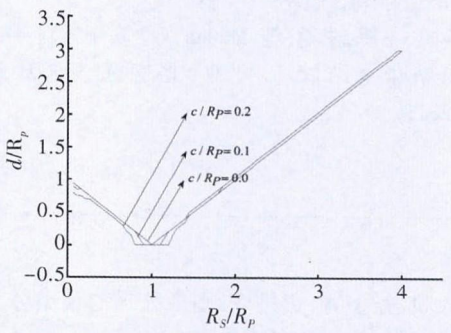


图5 互感最大值位置与线圈尺寸的关系

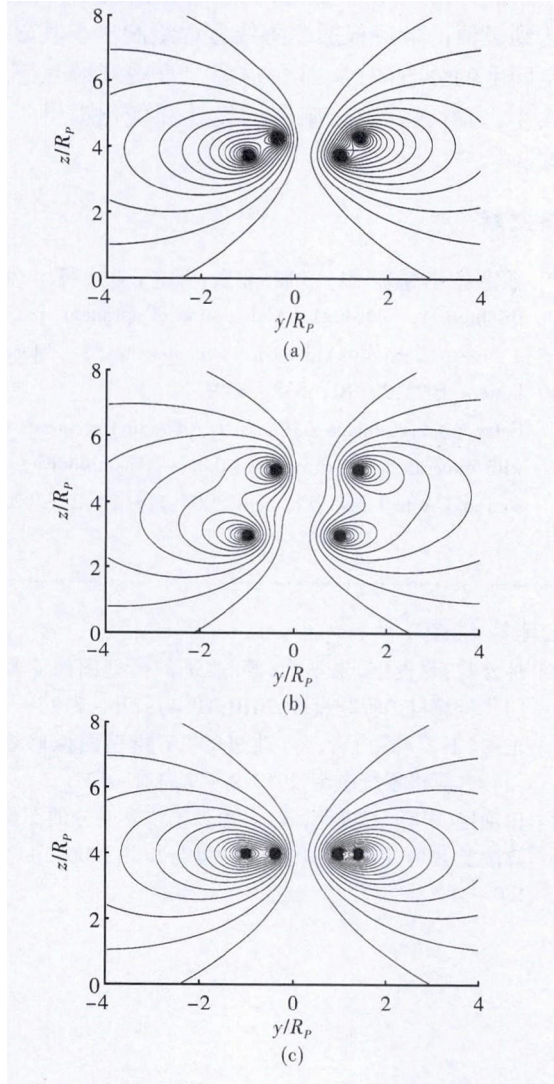
再次讨论线圈尺寸对互感系数的影响,图4给出共面时互感随线圈尺寸的变化关系,图4表明,当 $d/R_p < 1.0$ 时,互感为正值,随子线圈的尺寸增大而增大,达到最大值后,随子线圈的增大而减小;当 $d/R_p > 1.0$ 时,互感随子线圈的尺寸增大而增大到最大负值,然后随子线圈尺寸增大而达到最大正值,最后随子线圈的增大而减小。

为进一步讨论电磁感应传感器产生最大感应电

动势的位置,最后给出了互感最大值的偏移位置与线圈尺寸和线圈平面距离之间的关系,如图5所示。当 $R_s/R_p < 1$ 时,随着 R_s/R_p 的增加,互感最大值的位置向 d 减小的方向移动;当 $R_s = R_p$ 时,最大值位置在 $d = 0$ 处;当 $R_s/R_p > 1$ 时,随 R_s/R_p 的增加,互感最大值的位置向 d 增大的方向移动,这为电磁感应传感器线圈尺寸的选择以及空间位置的放置提供了理论依据。

4.3 非共轴线圈的场分布

为了更加形象的理解互感系数的大小,根据式(8)可绘制出磁感线分布图。当两线圈中通以等大同向电流,当 $R_s/R_p = 1.0, d/R_p = 0.4$ 时,由 Matlab 软件^[15]绘出 $c/R_p = 0.5$ 和 2.0 时 YOZ 平面内的磁感线分布,图6(a)中的磁感线更为密集,表明图6(a)的互感互感较大,这与图2和图3所说明的结论一致;当 $R_s/R_p = 1.0, c/R_p = 0$ 时,图6(c)和图6(d)两图分别给出 $d/R_p = 0.4$ 和 0.8 时的磁感应线分布,比较图6(c)与图6(d)及图6(c)图的磁感线更为密集,表明图6(c)的互感较大,这与图3和图4所说明的结论一致。



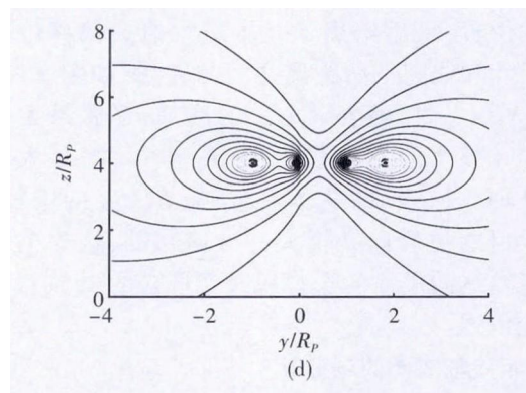


图6 非共轴线圈的磁感线分布

5 结束语

本文根据 Grover 公式,讨论了圆形线圈平面间的距离、圆形线圈的尺寸以及两圆线圈轴之间的距离对互感系数大小的变化规律:当偏移距离、线圈尺寸一定时,两线圈的互感随平面距离的增加而减小;当两线圈平面距离一定时,互感的绝对大小由偏移距离和线圈尺寸共同确定;互感的正负变化,说明了穿过子线圈总磁通量的方向发生了变化,互感的极值说明了总磁通量达到极值。最后根据磁感线方程绘制出了其磁感线在空间上的分布图,从而在物理上直观理解互感系数的大小,为电磁感应传感器的设计和优化提供了理论依据。

参考文献

- [1] 强锡富. 传感器[M]. 3版. 北京:机械工业出版社,2004.
- [2] Brighton M, English M J. Calculation of optimum spacing for a three coil axially symmetric metal detector[J]. Electronics Letters, 1993, 29(10): 838 - 839.
- [3] Catrysse M, Hermans B, Puers R. An inductive power system with integrated bi-directional data-transmission[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2004, 115(2): 221 - 229.

- [4] Danisi A, Masi A, Losito R, et al. Electromagnetic analysis and validation of an ironless inductive position sensor[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2013, 62(5): 1267 - 1275.
- [5] Acero J, Carretero C, Lope I, et al. Analysis of the mutual inductance of planar-lumped inductive power transfer systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(1): 410 - 420.
- [6] Grzeskowiak M, Diet A, Diao P S, et al. Pebbles tracking thanks to RFID LF multi-loops inductively coupled reader[J]. Progress In Electromagnetics Research C, 2014(55): 129 - 137.
- [7] 谢处方, 饶克谨. 电磁场与电磁波[M]. 4版. 北京:高等教育出版社, 2006.
- [8] Grover F W. Inductance calculations[M]. New York: Dover Publications, 1964.
- [9] 张星辉, 何钰, 徐行可. 任意两共轴线圈间的互感系数及磁感线的分布[J]. 大学物理, 2007, 26(7): 21 - 24.
- [10] 刘雪萍, 董全林, 赵伟霞, 等. 多圈共轴线圈产生错位对激励磁场的影响[J]. 计量学报, 2015(2): 573 - 578.
- [11] 石东, 王三胜, 易忠. 线圈磁传感器的发展现状与空间应用[J]. 航天器环境工程, 2015, 32(1): 53 - 57.
- [12] Grover F W. The calculation of the mutual inductance of circular filaments in any desired positions[J]. Proceedings of the I. R. E., 1944, 32(10): 620 - 629.
- [13] Babic S I, Sirois F, Akyel C. Validity check of mutual inductance formulas for circular filaments with lateral and angular misalignments[J]. Progress in Electromagnetics Research M, 2009(8): 15 - 26.
- [14] Smythe W R. Static and dynamic electricity[M]. New York: McGraw-Hill, 1950.
- [15] 刘焕进, 王辉, 李鹏, 等. Matlab N个实用技巧: Matlab中文论坛精华总结[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2011.

(上接第64页)

- [10] 林云莉, 赵俊红, 朱学峰, 等. 改进的模型图像修复算法[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(4): 776 - 779.
- [11] 王涛, 王军峰, 白青, 等. 改进的TV模型图像修复算法[J]. 计算机系统应用, 2013, 22(3): 121 - 124.
- [12] 田艳艳, 祝轩, 彭进业, 等. 一种基于整体变分的图像修补算法及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(26): 180 - 182.
- [13] 王大凯, 候榆青, 彭进业. 图像处理的偏微分方程方法[M]. 北京:科学出版社, 2008.
- [14] 顾建平. 图像修复快速算法研究[D]. 北京:中国科学院自动化研究所, 2005.
- [15] 屈磊, 韦穗, 梁栋, 等. 综合自适应与多尺度的TV图像修复方法[J]. 计算机工程, 2007, 33(22): 18 - 20.