2. 推导如下的极坐标下对弧长的曲线积分的计算公式：

$$\int_{(C)} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f[\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

其中积分曲线(C)的方程由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$给出.

解 由直角坐标与极坐标的关系，可令 $x=\rho(\theta)\cos\theta$，$y=\rho(\theta)\sin\theta$，其中 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，则

$$x'(\theta)=\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta,\quad y'(\theta)=\rho'(\theta)\sin\theta+\rho'(\theta)\cos\theta.$$

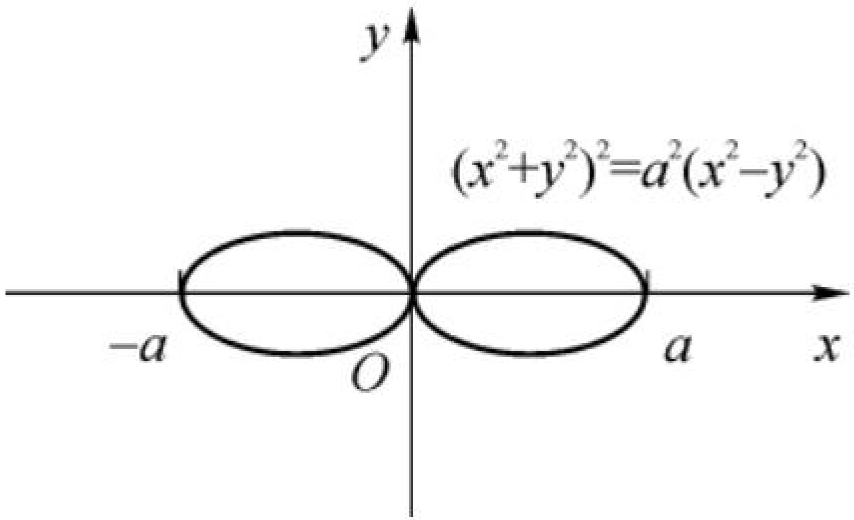
故而，

$$\begin{aligned}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}&=\sqrt{[\rho'(\theta)]^2\cos^2\theta+\rho^2(\theta)\sin^2\theta+[\rho'(\theta)]^2\sin^2\theta+\rho^2(\theta)\cos^2\theta}\\&=\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+\rho^2(\theta)},\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{(C)}f(x,y)\,\mathrm{d}s&=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\ \sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\ \sqrt{[\rho^2(\theta)]+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

(4) $\oint_{(C)} |y| \mathrm{d}s$，其中曲线(C)是双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$.



$\rho^2=a^2\cos 2\theta$. 用隐函数求导得

$$\rho\rho'=-a^2\sin 2\theta,\quad \rho'=-\frac{a^2\sin 2\theta}{r},$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{\rho^2+\frac{a^4\sin^2 2\theta}{r^2}}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$\int_{(C)}|y|\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\cdot\frac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2(2-\sqrt{2})a^2.$$

(5) $\iint\limits_{(S)}[(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]$，其中(S)是曲面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间部分的下侧；

(5)（方法一：直接计算）

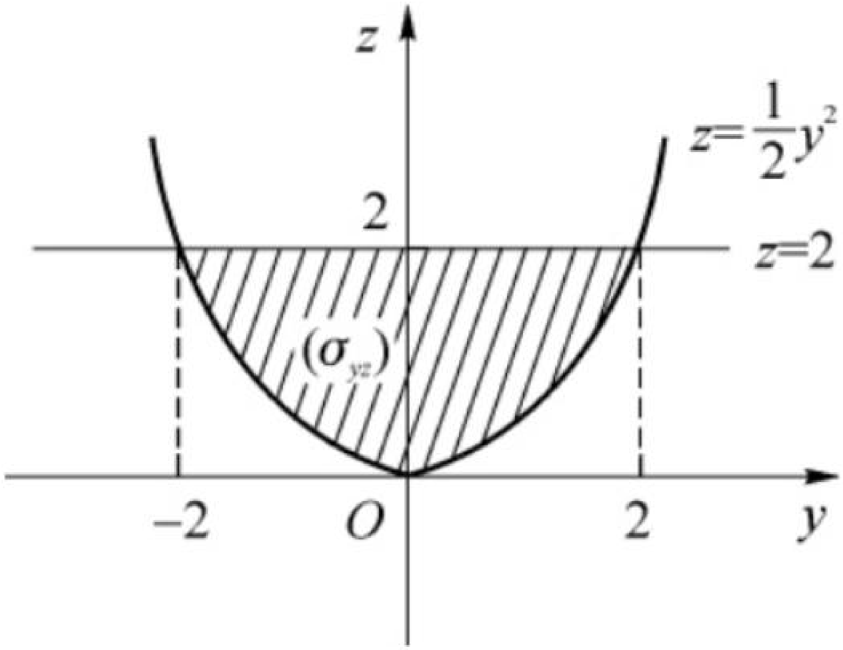
(S)是曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分，要计算 $\iint\limits_{(S)} -z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，可以将(S)投影到 xOy 平面为 (σ_{xy})：$x^2+y^2\leqslant 4$，即

$$(S): z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), (x,y)\in(\sigma_{xy}).$$

由于方向是朝下的，故

$$\iint\limits_{(S)} -z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint\limits_{(\sigma_{xy})} -\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \frac{1}{2}\rho^2\rho\mathrm{d}\rho=4\pi.$$

下面计算 $\iint\limits_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，将(S)投影到 yOz 面为 (σ_{yz})



$(S)=(S_1)+(S_2)$，其中，(S_1)：

$x=\sqrt{2z-y^2}$，$(x,y)\in(\sigma_{yz})$，方向朝前，(S_2)：$x=-\sqrt{2z-y^2}$，$(x,y)\in(\sigma_{yz})$，方向朝后，故

$$\iint_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$=(\iint_{(S_1)}+\iint_{(S_2)})(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{(\sigma_{yz})}(z^2+\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{(\sigma_{yz})}(z^2-\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{(\sigma_{yz})}2\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}z=2\int_{-2}^{2}\frac{1}{3}(2z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_{0}^{2}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\quad(\text{其中，令 } y=2\sin\theta)$$

$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}16\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4\pi,$$

故 $$\iint\limits_{(S)} (z^2 + x)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 8\pi.$$

(7) $\oiint\limits_{(S)}(xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$,其中(S)是由 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的四面体边界的外侧;

(7) (S)是由 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的四面体边界的外侧，设其在 xOy，yOz，zOx 平面上的部分分别为 (S_1)，(S_2)，(S_3)，在 $x+y+z=1$ 面上的部分为 (S_4).

$$\iint\limits_{(S_1)} xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{(S_1)} xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint\limits_{(\sigma_{xy})} x\cdot 0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint\limits_{(S_2)} xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{(S_2)} xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\iint\limits_{(\sigma_{yz})} 0\cdot y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0,$$

$$\iint\limits_{(S_3)} xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint\limits_{(S_2)} yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=-\iint\limits_{(\sigma_{zx})} 0\cdot z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0,$$

故

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint\limits_{(S_4)} xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&= 3 \iint\limits_{(S_4)} xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} x(1 - x - y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= 3\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

1. 高斯公式

定理 设空间二维单连通区域(V)的边界是一个分片光滑的简单闭曲面(S),并设向量场$\boldsymbol{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^{(1)}((V))$,则

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{(+S)}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

这里$(+S)$表示曲面积分是沿着曲面(S)的外法线方向,式(1)称为**高斯公式**.

若曲面(S)与平行于坐标轴的直线的交点多于两个,可用光滑曲面将有界闭区域(V)分割成若干个小区域,使得围成每个小区域的闭曲面满足定理的条件,从而高斯公式仍是成立的.

此外,根据两类曲面积分之间的关系,高斯公式也可表为

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{(S)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

这里$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲面(S)上点$(x,y,z)$处的外法向量的方向余弦.

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{(S)}(xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，其中(S)是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+y+z=1$所围成的四面体表面的外侧；

解　(1) (S)是平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体表面的外侧. 设(V)是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体,(σ_z)为(V)与平行于 xOy 的平面 $z=z$ 相交而成的区域,应用高斯公式,则有

$$\begin{aligned}
&\oiint_{(S)}(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\
&=\iiint_{(V)}(y+z+x)\,\mathrm{d}V=3\iiint_{(V)}z\,\mathrm{d}V\\
&=3\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma_z)}\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z\\
&=\frac{3}{2}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

(2) $\oiint\limits_{(S)}(x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$,其中(S)是立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 表面的外侧;

(2)(S)是立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 表面的外侧.设(V)是立方体 $0\leqslant x\leqslant a$,$0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$,$(\sigma_z)$为(V)与平行于 xOy 的平面 $z=z$ 相交而成的区域,应用高斯公式,则有

$$
\begin{aligned}
&\oiint_{(S)}(x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\
&=\iiint_{(V)}2(x+y+z)\,\mathrm{d}V\\
&=6\iiint_{(V)}z\,\mathrm{d}V\\
&=6\int_0^a z\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma_z)}\mathrm{d}\sigma\\
&=6a^2\int_0^a z\,\mathrm{d}z=3a^4.
\end{aligned}
$$

(3) $\oiint_{(S)}(x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，其中(S)是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧；

(3) (S)球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 设(V)是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,(σ_z)为(V)与平行于 xOy 的平面 $z=z$ 相交而成的区域,应用高斯公式,则有

$$\begin{aligned}
&\oiint_{(S)}(x^3\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\
&=\iiint_{(V)}3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\
&=9\iiint_{(V)}z^2\,\mathrm{d}V=9\int_{-R}^{R}z^2\,\mathrm{d}z\iint_{(\sigma_z)}\mathrm{d}\sigma\\
&=18\pi\int_0^R z^2(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{12}{5}\pi R^5.
\end{aligned}$$

(4) $\iint\limits_{(S)}\left[(x^2-2xy)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2xz)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right]$，其中(S)是以原点为圆心、$a$ 为半径的上半球面的上侧；

(4) 由于(S)是以原点为圆心、a 为半径的上半球面的上侧,记 xOy 平面上以原点为圆心、a 为半径的圆域为(S_1),(V)是以(S)和(S_1)为边界曲面的半球体,则可利用高斯公式有

$$\iint\limits_{(+S)}[(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2zx)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]+\iint\limits_{(-S_1)}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{(V)}-2z\mathrm{d}V,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)}[(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2zx)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]\\
&=\iiint\limits_{(V)}-2z\mathrm{d}V+\iint\limits_{(+S_1)}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iiint\limits_{(V)}z\mathrm{d}V+\pi a^2\\
&=-2\int_0^a z\mathrm{d}z\iint\limits_{\sigma}\mathrm{d}\sigma+\pi a^2=-2\int_0^a z\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z+\pi a^2\\
&=-\frac{\pi a^4}{2}+\pi a^2.
\end{aligned}$$

格林公式及其应用

若二元函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域(σ)上有连续偏导数，则

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_{(+C)}[P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y],$$

其中$(+C)$表示有向曲线(C)的方向取正向.

利用格林公式可求平面图形的面积. 若在格林公式中，令 $P=-y$，$Q=x$，得

$$2\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_{(C)}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,$$

式(1)左端是闭区域(σ)的面积 A 的两倍，因此有

$$A=\frac{1}{2}\oint\limits_{(C)}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

1. 应用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint\limits_{(+C)}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中有向曲线$(+C)$是以点$A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$为顶点的三角形的边界；

解　下面求解时设积分值为 I.

(1)由于有向曲线$(+C)$是以点 $A(0,0)$,$B(1,0)$,$C(0,1)$为顶点的三角形的边界,可得

$$P=(x+y)^2,\quad Q=-(x^2+y^2),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-4x-2y,$$

故

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}-4x-2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(-4x-2y)\mathrm{d}y=1.$$

(2) $\oint_{(+C)}(x^3-3y)\mathrm{d}x+3(x+ye^y)\mathrm{d}y$,其中有向曲线$(+C)$是由 $y=0$,$x+y=1$ 及 $x^2+y^2=1$ $(x\leqslant 0, y\geqslant 0)$围成的区域的边界;

(2)由于有向曲线$(+C)$是由 $y=0$,$x+y=1$ 及 $x^2+y^2=1(x\leqslant 0, y\geqslant 0)$围成的区域的边界,可得

$$P=x^3-3y,\quad Q=3(x+y\mathrm{e}^y),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=6,$$

故

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}6\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=3+\frac{3}{2}\pi.$$

(3) $\oint_{(+C)}(1-x^2)y\mathrm{d}x+x(1+y^2)\mathrm{d}y$,其中有向曲线$(+C)$是圆周 $x^2+y^2=4$;

(3) 由题意可知 $P=(1-x^2)y$, $Q=x(1+y^2)$，故而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1+y^2-(1-x^2)=x^2+y^2,$$

有向曲线$(+C)$是圆周 $x^2+y^2=4$，向径 $\boldsymbol{r}=(x,y)$，故

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\boldsymbol{r}^2\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi\left.\frac{\boldsymbol{r}^4}{4}\right|_0^R=\frac{\pi}{2}R^4.$$

(4) $\oint\limits_{(+C)} (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$,其中有向曲线$(+C)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$;

(4) 由题意可知 $P=x+y$，$Q=-(x-y)$，故而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2,$$

有向曲线$(+C)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$，且椭圆区域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 的面积为 πab，可得

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{(\sigma)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi ab.$$

(5) $\int_{(C)} (e^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (e^x \cos y - mx)\mathrm{d}y$,其中有向曲线$(C)$是从点 $A(a,0)$到点 $O(0,0)$的上半圆周 $x^2+y^2=ax$,m 是常数,$a>0$;

(5) 在 x 轴上连接点 $O(0,0)$ 与 $A(a,0)$，这样便构成封闭的半圆形 $\overset{\frown}{AMOA}$，且在线段 OA 上

$$\int_{(OA)} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy = 0,$$

则

$$\int_{\overset{\frown}{AMO}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy = \int_{\overset{\frown}{AMOA}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy,$$

利用格林公式得

$$\int_{\overset{\frown}{AMOA}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy = \iint_{(\sigma)} 0 dxdy = 0.$$

利用积分与路径无关来计算下列曲线积分：

(1) $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$；

与积分路径无关，则可以选一条好积分的路径

（1）选 x=1，-1<= y <= 1

或者

解　(1) 因 $(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\,\dfrac{(x-y)^2}{2}$，则

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=\left.\frac{(x-y)^2}{2}\right|_{(1,-1)}^{(1,1)}=-2.$$

(2) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \frac{2x(1-e^{y})}{(1+x^{2})^{2}}dx+\frac{e^{y}}{1+x^{2}}dy$；

(2) 因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2x\mathrm{e}^y}{(1+x^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,所以积分与路径无关. 设积分路径$(C)$为折线$(C_1)+(C_2)$,其中$(C_1)$:$y=0,0\leqslant x\leqslant 1$, (C_2):$x=1,0\leqslant y\leqslant 1$,则

$$I=\int_0^1 \frac{0}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^y}{1+1}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^y}{2}\bigg|_0^1=\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

(3) $\int_{(1,1)}^{(3,3\mathrm{e})} \left(\ln\frac{y}{x}-1\right)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，沿任一条不通过原点的路径；

(3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时，$P=\ln\dfrac{y}{x}-1$，$Q=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y}=0$，可知积分与路径无关. 设积分路径$(C)$为折线$(C_1)+(C_2)$，其中$(C_1)$：$y=1$，$1\leqslant x\leqslant 3$，$(C_2)$：$x=3$，$1\leqslant y\leqslant 3\mathrm{e}$，从而

$$\begin{aligned}
&\int_{(1,1)}^{(3,3\mathrm{e})}\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y\\
&=\int_1^3\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x+\int_1^{3\mathrm{e}}\frac{3}{y}\mathrm{d}y\\
&=\int_1^3(-\ln x-1)\mathrm{d}x+3\ln y\Big|_1^{3\mathrm{e}}\\
&=-x\ln x\Big|_1^3+3\ln y\Big|_1^{3\mathrm{e}}\\
&=-3\ln 3+3\ln 3\mathrm{e}=3.
\end{aligned}$$

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿任一条不通过原点的路径；

（4）显然，当$(x,y)\neq(0,0)$时，$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{(1,0)}^{(6,8)}\mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)}=9.$$

(5) $\int_{(C)}(1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-y)\mathrm{d}y$,其中积分路径$(C)$是从点$O(0,0)$到点$A(4,0)$的上半圆周$(x-2)^2+y^2=4$;

(5) $P=1+xe^{2y}$, $Q=x^2e^{2y}-y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}-2xe^{2y}=0$,

可知积分与路径无关.

设(C_1)为 x 轴上从 $O(0,0)$到点 $A(4,0)$直线段,从而

$$\int_{(C)}(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y=\int_{(C_1)}(1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-y)\mathrm{d}y=\int_0^4(1+x)\mathrm{d}x=12.$$