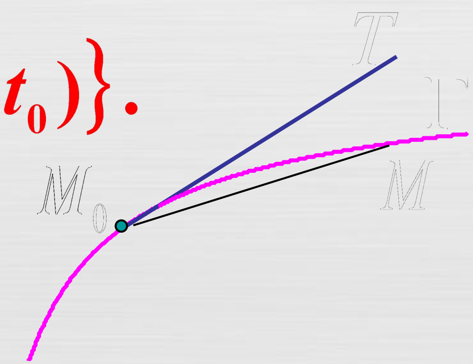
空间曲线的切线

空间曲面的法向量

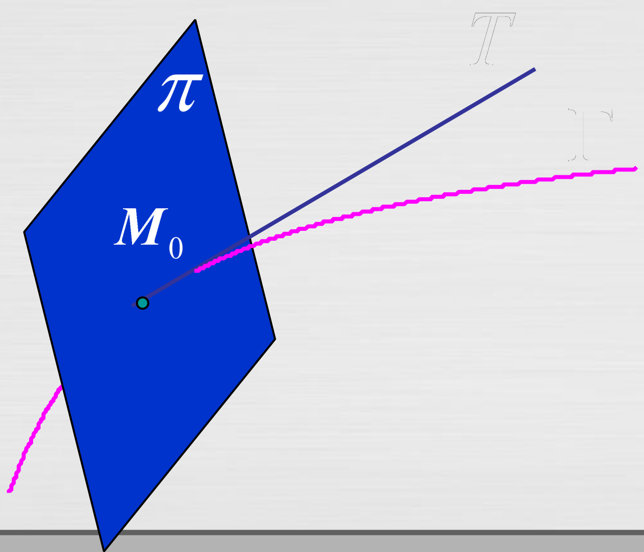
1.曲线的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)},$

切线的方向向量 s 为 $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$



曲线 Γ 在点 M_0处的**法平面**方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$



例1. 求螺旋线 $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$

的点处的切线与法平面方程.

解: 当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时 $\quad x = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,,$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,.$$

得曲线上的点 $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi)$

因为 $x' = -2\sin t\,,\ y' = 2\cos t\,,\ z' = \sqrt{2}\,,$

$$\boxed{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\pi)}$$

所以

$$x'\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}\,,\quad y'\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,,\quad z'\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,.$$

切线的方向向量为 $\vec{s} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$

于是， 所求点处的切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\boxed{x' = -2\sin t\,,\ y' = 2\cos t\,,\ z' = \sqrt{2}\,,}$$

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}{\sqrt{2}},$$

即 $$\frac{x-\sqrt{2}}{-1}=\frac{y-\sqrt{2}}{1}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}{1}.$$

该点处的法平面方程为

$$-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}(z-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi)=0,$$

即 $$4x-4y-4z+\sqrt{2}\,\pi=0.$$

例 2. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=16x^2 \\ z=12x^2 \end{cases}$，上对应于 $x=\dfrac{1}{2}$

的点处的切线与法平面方程.

解: 令 $x=t$，则曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t\,, \\ y=16t^2\,, \\ z=12t^2\,. \end{cases}$$

当 $t=x=\dfrac{1}{2}$时，$y=4$，$z=3$.

得曲线上的点 $M_0(\dfrac{1}{2},4,3)$

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 16t^2, \\ z = 12t^2. \end{cases}$$

因为 $x'\big|_{t=\frac{1}{2}} = 1$, $y'\big|_{t=\frac{1}{2}} = 16$, $z'\big|_{t=\frac{1}{2}} = 12$,

$$\begin{cases} x_t' = 1, \\ y_t' = 32t \\ z_t' = 24t \end{cases}$$

切线的方向向量为 $\vec{s} = (1,16,12)$

所以所求点处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y-4}{16} = \frac{z-3}{12},$$

法平面方程为

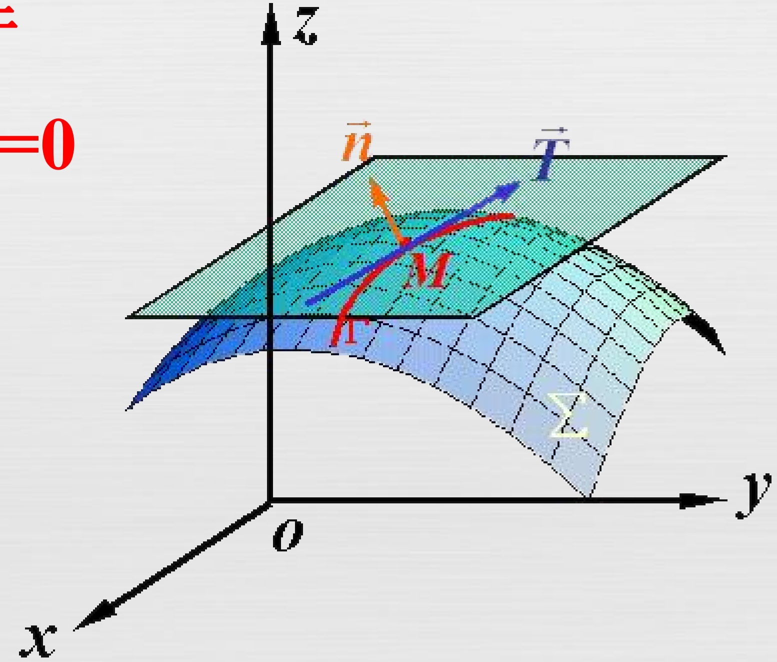
$$x - \frac{1}{2} + 16(y-4) + 12(z-3) = 0,$$

即 $$2x + 32y + 24z - 201 = 0.$$

$M_0(\frac{1}{2}, 4, 3)$

2. 曲面的切平面与法线方程

(1)空间曲面方程为 $F(x,y,z)=0$



曲面Σ上过点M_0处的切平面的法向量

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$,

则曲面Σ在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

曲面 Σ 在点 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

例1. 求球面$x^2+y^2+z^2=14$

在点（1,2,3）处的切平面及法线方程.

解: $$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$$

$$n=\left(F_x',F_y',F_z'\right)\big|_{(1,2,3)}=(2x,2y,2z)\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$$

所以，在点（1,2,3）处的切平面方程为.

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$$

即 $x+2y+3z-14=0$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}.$

(2) 空间曲面方程为 $z=f(x,y)$

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$, 则 $\begin{cases} F_x(x_0,y_0,z_0)=f'_x(x_0,y_0), \\ F_y(x_0,y_0,z_0)=f'_y(x_0,y_0), \\ F_z(x_0,y_0,z_0)=-1 \end{cases}$

则曲面在点 M_0处的切平面方程为

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

即 $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

而法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例 2. 求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (3, 4, 5)处的切平面及法线方程.

解: 设 $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f'_x(3,4) = \frac{3}{5}, \quad f'_y(3,4) = \frac{4}{5}.$$

切平面的法向量 $\vec{n} = \{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\}$

因此，所求点的切平面方程为

$$z-5=\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4),$$

即 $$3x+4y-5z=0,$$

法线方程为 $$\frac{x-3}{\frac{3}{5}}=\frac{y-4}{\frac{4}{5}}=\frac{z-5}{-1},$$

即 $$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{-5}.$$

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

空间曲面与曲线

习题课

1. 直线 $L: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程.

解: 设直线上一点 $M_1(1, y_1, z_1)$ 有 $y_1 = z_1$,

旋转后 $M_1(1, y_1, z_1)$ 到达 $M(x, y, z)$ 位置

由于高度不变，有 $z = z_1$,

又 M 和 M_1 到 z 轴的距离 r 不因旋转而改变,

故 $r^2 = 1 + y_1^2 = x^2 + y^2,$

由于 $z = z_1 = y_1,$

故所求旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面 $x+y+z=1$ 的交线在 xoy 平面的投影曲线方程.

解: $\because$ 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$,它与所给平面的

交线为 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

此曲线向 xoy 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

提高题

1. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

提高题解答

1. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解: 在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=2-x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ z=0 \end{cases}$$

在 zOx 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2 \\ y=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

在 yOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z=(\pm\sqrt{2-y^2-z}-1)^2+(y-1)^2 \\ x=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0 \\ x=0 \end{cases}$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解: 锥面与柱面交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}2x=x^2+y^2\\ z=0\end{cases}，即 \quad \begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$$

所以, 立体在 xOy 面上的投影为 $(x-1)^2+y^2\le 1$

锥面与柱面交线在 yOz 面上的投影为

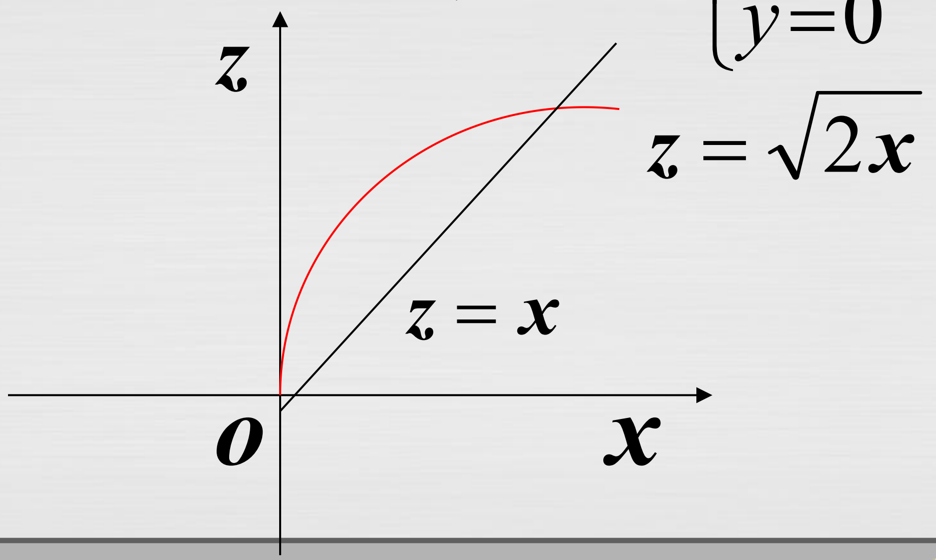
$$\begin{cases}z=\sqrt{(\frac{1}{2}z^2)^2+y^2}\\ x=0\end{cases}，即 \quad \begin{cases}(\frac{z^2}{2}-2)^2+y^2=1\\ x=0\end{cases}$$

所以, 立体在 yOz 面上的投影为 $(\frac{z^2}{2}-2)^2+y^2\le 1$

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面$z^2=2x$与平面$y=0$的交线为

$$\begin{cases} z=|x| \\ y=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} z=\sqrt{2x} \\ y=0 \end{cases}$$

所以, 立体在zOx面上的投影为 $\begin{cases} x\le z\le\sqrt{2x} \\ y=0 \end{cases}$



一、重要知识点

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x,y,z)=0$

- **球面:** 如,$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- **柱面:** 如,曲面$F(x,y)=0$,表示母线平行 z 轴的柱面.
- **旋转曲面:** 如, 曲线$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ ,z)=0$$

2. 二次曲面 $\longrightarrow$ 三元二次方程,截痕法.

- **椭球面:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- **双曲面:**

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

• **抛物面:** 椭圆抛物面 双曲抛物面

$(p,q$ 同号$)$ $$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$

3. 空间曲线方程.

一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

空间曲线在坐标面上的投影.

$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

在 xoy 面上 在 yoz 面上 在 xoz 面上

1. 建立以点(1,3，-2)为中心,且通过坐标原点的球面方程.

解： 球的半径为$R=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$

设(x,y,z)为球面上任一点，

则$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$

即通过坐标原点的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$$

2. 一动点离点（2,0，-3）的距离与离点（4，-6,6）的距离之比为3，求此动点的轨迹方程.

解：设该动点为$M(x,y,z)$，

由题意知 $$\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z+3)^2}}{\sqrt{(x-4)^2+(y+6)^2+(z-6)^2}}=3.$$

化简得：$8x^2+8y^2+8z^2-68x+108y-114z+779=0$

即为动点的轨迹方程.

3. 指出下列方程所表示的是什么曲面，并画出其图形：

(1) $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

(2) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$

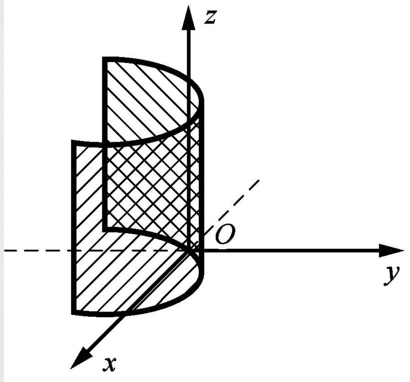
(4) $y^2-z=0$

(5) $x^2-y^2=0$

(6) $x^2+y^2=0$

解：（1）母线平行于z轴的抛物柱面，

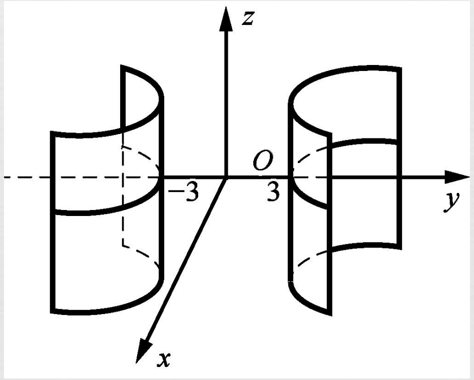
如图



$$(2)\ -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

解：（2） 母线平行于z轴的双曲柱面

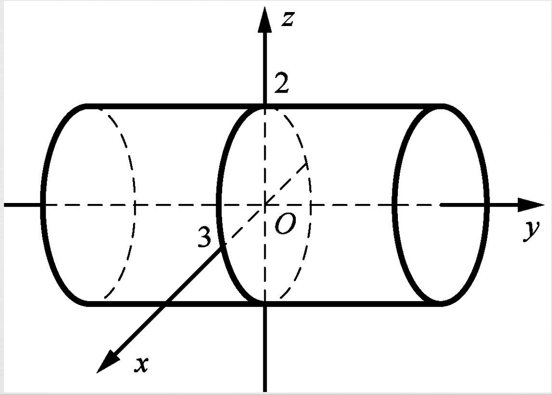
如图



$$(3)\ \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

解：（3） 母线平行于y轴的椭圆柱面，

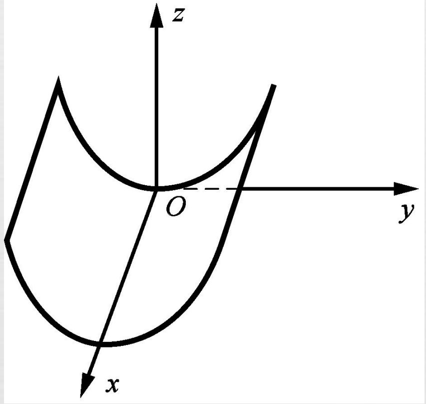
如图



$(4)\ y^2 - z = 0$

解： （4）母线平行于x轴的抛物柱面

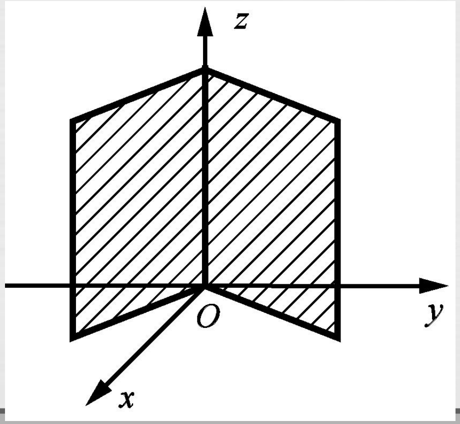
如图



$(5)\ x^2 - y^2 = 0$

解： （5）母线平行于z轴的两平面

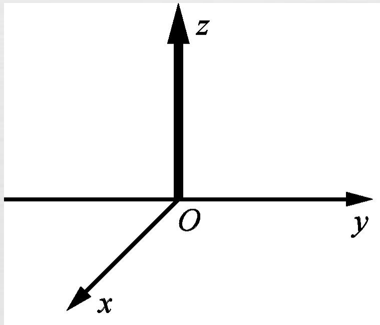
如图



$(6) x^2 + y^2 = 0$

解：（6） z轴

如图



4. 指出下列方程表示怎样的曲面，并作出图形：

$(1) x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

$(2) 36x^2+9y^2-4z=36$

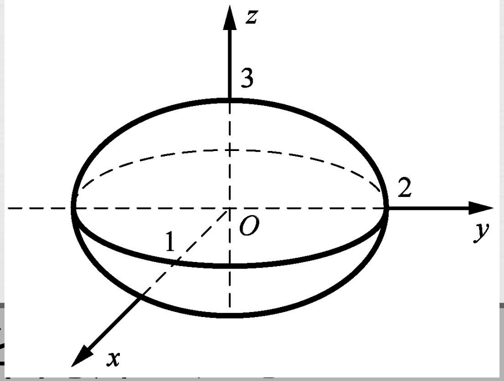
$(3) x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$

$(4) x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=11$

$(5) x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$

解：（1）半轴分别为1，2，3的椭球面

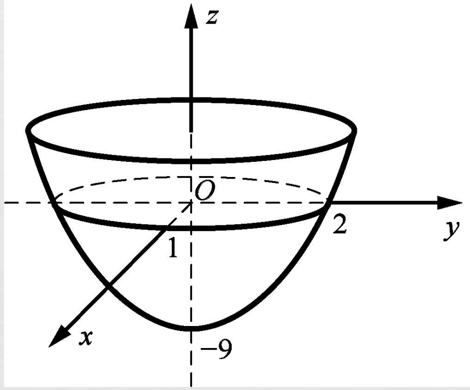
如图



$$(2)36x^2+9y^2-4z=36$$

解：（2）顶点在（0，0，-9）的椭圆抛物面

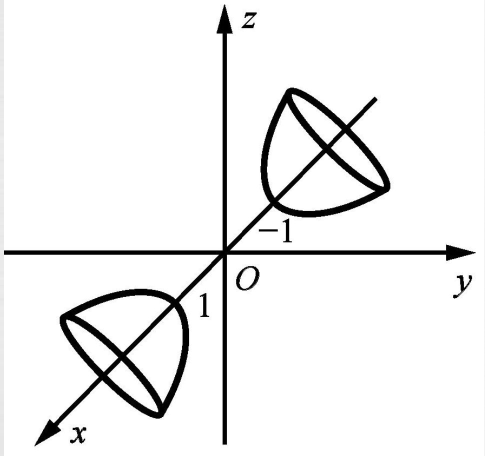
如图



$$(3)x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$

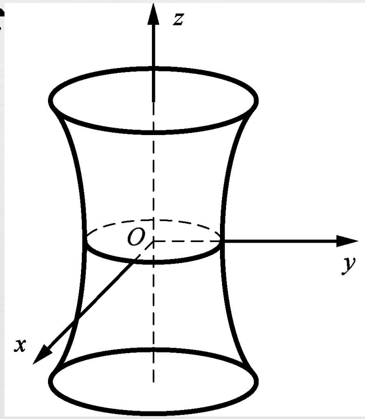
解：（3）以x轴为中心轴的双叶双曲面

如图



$$(4)x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=11$$

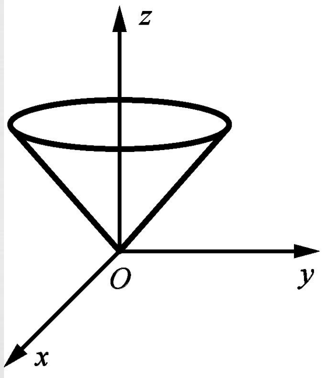
解：（4） 单叶双曲面



如图

$$(5)x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$$

解：（5） 顶点在坐标原点的圆锥面，其中心轴是z轴



如图

5. 作出下列曲面所围成的立体的图形：

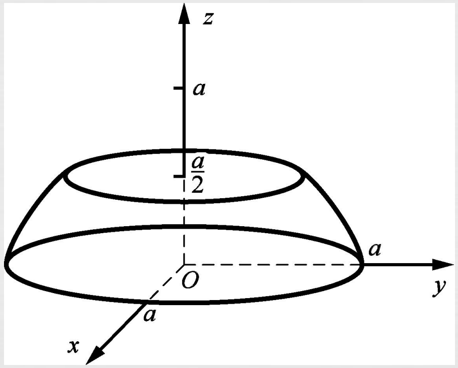
(1) $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $z=0, z=\dfrac{a}{2}\left(a>0\text{为常数}\right)$

(2) $x+y+z=4$ 及 $x=0, x=1, y=0, y=2$ 及 $z=0$

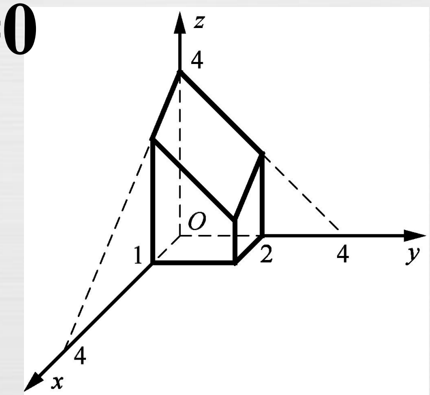
(3) $z=4-x^2, x=0, y=0, z=0$ 及 $2x+y=4$

(4) $z=6-(x^2+y^2), x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y=1$

解：（1） 如图

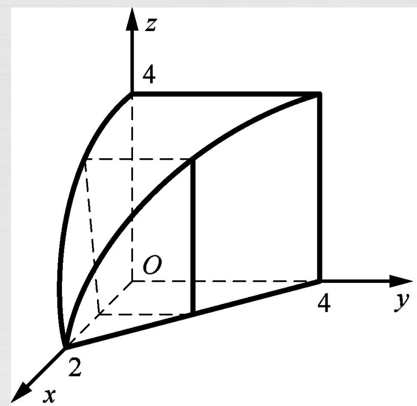


(2) $x+y+z=4$ 及 $x=0, x=1, y=0, y=2$ 及 $z=0$



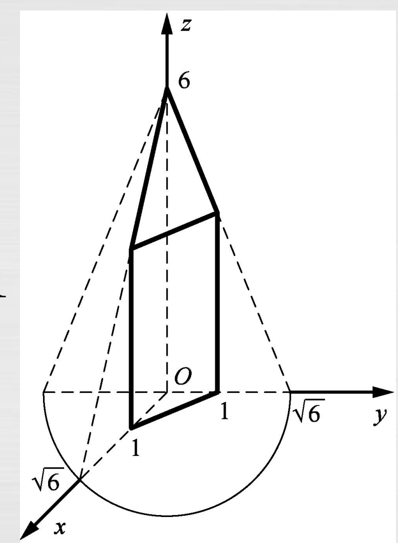
解： （2）如图

(3) $z=4-x^2, x=0, y=0, z=0$ 及 $2x+y=4$



解： （3）如图

(4) $z=6-(x^2+y^2), x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y=1$



解： （4） 如图

6. 求下列曲面和直线的交点：

(1) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 与 $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$

(2) $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$ 与 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$

解： （1）直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=3+3t \\ y=4-6t \\ z=-2+4t \end{cases}$$

代入曲面方程解得 $t=0,t=1.$

得交点坐标为（3，4，-2），（6，-2，2）.

(2) $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$ 与 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$

解： （2）直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=4t \\ y=-3t \\ z=-2+4t \end{cases}$$

代入曲面方程解得 $t=1$.

得交点坐标为（4，-3，2）

7. 设有一圆，它的中心在z轴上、半径为3，且位于距离xoy平面5个单位的平面上，试建立这个圆的方程.

解： 设（x，y，z）为圆上任一点，

依题意有

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = \pm 5 \end{cases}$$

所求圆的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 5 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = -5 \end{cases}$$

8. 试考察曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$ 在下列各平面上的截痕的形状，并写出其方程.

(1)平面x=2　　(2) 平面y=0

(3)平面y=5　　(4)平面z=2

解：（1） 截线方程为

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{(\frac{5\sqrt{5}}{3})^2}+\dfrac{z^2}{(\frac{2\sqrt{5}}{3})^2}=1 \\ x=2 \end{cases}$$

其形状为x=2平面上的双曲线.

(2) 平面$y=0$

解：（2）截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

为xOz面上的一个椭圆.

(3)平面$y=5$

解：（3） 截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(3\sqrt{2})^2}+\dfrac{z^2}{(2\sqrt{2})^2}=1 \\ y=5 \end{cases}$$

为平面$y=5$上的一个椭圆.

(4)平面z=2

解：（4）截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=0 \\ z=2 \end{cases}$$

为平面z=2上的两条直线.

9. 求曲线$x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=z^2$在$xoy$面上的投影曲线.

解: 消去z得

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$$

以曲线为准线，母线平行于z轴的柱面方程

故曲线在xOy面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{a^2}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

10. 建立曲线 $x^2+y^2=z, z=x+1$ 在xoy平面上的投影方程.

解： 消去z得

$x^2+y^2=x+1$ 即 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4}$

以曲线为准线，母线平行于z轴的柱面方程

故曲线在xOy面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4} \\ z=0 \end{cases}$$