第二类曲面积分(对坐标的曲面积分)的概念与性质

定义 2 设(S)是一有向光滑曲面,其任意一点(x,y,z)处单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k},$$

又设向量场函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中函数 P,Q,R 在(S)上有界,则函数

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma.$$

考虑(S)上 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 的第一类曲面积分,有

$$\iint_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{(\Sigma)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

称 $\iint_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$在有向曲面(S)上的**第二类曲面积分**或**对坐标的曲面积分**.

记 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\cos\alpha\mathrm{d}S,\cos\beta\mathrm{d}S,\cos\gamma\mathrm{d}S)$，则函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在有向曲面 (S) 上的第二类曲面积分可记为

$$\iint_{(S)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

有时也可记为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\quad\text{或}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

则函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在有向曲面(S)上的第二类曲面积分的坐标形式如下：

$$\iint_{(S)}[P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]$$

$$\iint_{(S)}[P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y].$$

对坐标的曲面积分的计算法

将对坐标的曲面积分化成在D_{xy}上的二重积分

设曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出的上侧，

三定号

二代

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, \boxed{z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, \boxed{z(x, y)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

一投

将下列对坐标的曲面积分化为累次积分：

(1) $\iint\limits_{(S)} \frac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \wedge dy$，其中(S)是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 和 $z=2$ 截下部分的外侧；

解　(1)锥面截下部分的外侧曲面为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，其中 $1\leqslant z\leqslant 2$，投影区域(σ_{xy})为圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，故

$$\iint\limits_{(S)} \frac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{e^{\rho\cos\theta}}{\rho} \rho d\rho.$$

(2) $\oiint\limits_{(S)}[(x+y+z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z]$，其中$(S)$是三坐标平面和平面 $x=1, y=1$，$z=1$围成的六面体表面的外侧.

(2) (S)是三坐标平面和平面 $x=1, y=1, z=1$ 围成的四面体的表面，设$(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)+(S_4)+(S_5)+(S_6)$，其中这六个面所在平面的方程分别为

$$(S_1): z=1,\quad (S_2): z=0,\quad (S_3): x=1,\quad (S_4): x=0,\quad (S_5): y=1,\quad (S_6): y=0,$$

在 xOy 平面上有投影的只有(S_1)上侧和(S_2)下侧，在 yOz 平面上有投影的只有(S_3)前侧和 S_4 后侧，所以

$$\oiint\limits_{(S)}[(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z]$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y+1)\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(y-z)\mathrm{d}z-\int_0^1\mathrm{d}\mathbf{z}\int_0^1(y-z)\mathrm{d}y.$$

计算下列对坐标的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{(S)} y^2 z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中(S)是半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$ 的外侧；

解 (1) (S)是半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$，它在 xOy 面上的投影区域 (σ_{xy}) 为圆域

$$x^2+y^2\leqslant R^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(S)} y^2 z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y &= \iint\limits_{(\sigma_{xy})} y^2\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin^2\theta\cdot\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\cdot\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^R r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \mathrm{d}r^2 \\
&= \pi \cdot \int_0^R r^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_0^R r^2 \mathrm{d}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{3}(R^2 - r^2) r^2 \Big|_0^R + \frac{\pi}{3}\int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2r\mathrm{d}r \\
&= 0 + \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 - r^2)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \Big|_0^R \\
&= \frac{2\pi}{15} R^5 .
\end{aligned}
$$

(3) $\iint\limits_{(S)} \frac{z^2}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$,其中(S)是半球面 $z=\sqrt{2ax-x^2-y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下部分的上侧；

(3)(S)在 xOy 面上的投影区域(σ_{xy})为圆域

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\} \cap \{(x,y) \mid (x-a)^2+y^2 \leqslant a^2\},$$

因此

$$\iint\limits_{(S)} \frac{z^2}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{2ax-x^2-y^2}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{2ax}{x^2+y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \iint\limits_{(\sigma_{xy})} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

其中

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{2ax}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{2ar\cos\theta}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{2ar\cos\theta}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^a 2a\cos\theta\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}2a\cos\theta\mathrm{d}r\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}2a^2\cos\theta\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= 2\left[2a^2\cdot\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + a^2\cdot(2\theta+\sin 2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= 2\left(2a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)=\sqrt{3}a^2+\frac{2\pi}{3}a^2,$$

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\cdot\left(\frac{\pi a^2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)$$

(5) $\iint\limits_{(S)}[(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]$，其中(S)是曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间部分的下侧；

(5)（方法一：直接计算）

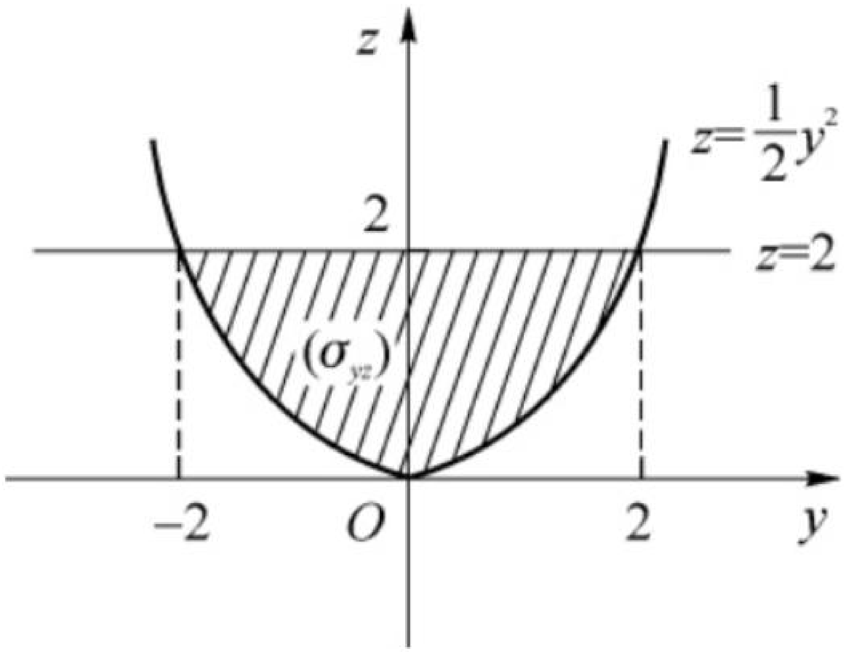
(S)是曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分，要计算 $\iint\limits_{(S)}-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，可以将(S)投影到 xOy 平面为 (σ_{xy})：$x^2+y^2\leqslant 4$，即

$$(S):z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),(x,y)\in(\sigma_{xy}).$$

由于方向是朝下的，故

$$\iint\limits_{(S)}-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint\limits_{(\sigma_{xy})}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{1}{2}\rho^2\rho\mathrm{d}\rho=4\pi.$$

下面计算 $\iint\limits_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，将(S)投影到 yOz 面为 (σ_{yz})



$(S)=(S_1)+(S_2)$，其中，(S_1)：

$x=\sqrt{2z-y^2}$，$(x,y)\in(\sigma_{yz})$，方向朝前，(S_2)：$x=-\sqrt{2z-y^2}$，

$(x,y)\in(\sigma_{yz})$，方向朝后，故

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\
&=(\iint\limits_{(S_1)}+\iint\limits_{(S_2)})(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\
&=\iint\limits_{(\sigma_{yz})}(z^2+\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{(\sigma_{yz})}(z^2-\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&=\iint\limits_{(\sigma_{yz})}2\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}z=2\int_{-2}^{2}\frac{1}{3}(2z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\mathrm{d}y \\
&=\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_{0}^{2}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y \quad (\text{其中，令 } y=2\sin\theta) \\
&=\frac{4}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}16\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4\pi,
\end{aligned}
$$

故
$$\iint\limits_{(S)}(z^2+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=8\pi.$$

(7) $\oint\!\!\!\!\oint_{(S)}(xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，其中$(S)$是由 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的四面体边界的外侧；

(7) (S)是由 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的四面体边界的外侧，设其在 xOy，yOz，zOx 平面上的部分分别为(S_1)，(S_2)，(S_3)，在 $x+y+z=1$ 面上的部分为(S_4).

$$\iint_{(S_1)}xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_{(S_1)}xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint_{(\sigma_{xy})}x\cdot 0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_{(S_2)}xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_{(S_2)}xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\iint_{(\sigma_{yz})}0\cdot y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0,$$

$$\iint_{(S_3)}xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_{(S_2)}yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=-\iint_{(\sigma_{zx})}0\cdot z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0,$$

故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_{(S_4)}xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&=3\iint_{(S_4)}xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=3\iint_{(\sigma_{xy})}x(1-x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1. 高斯公式

定理 设空间二维单连通区域(V)的边界是一个分片光滑的简单闭曲面(S),并设向量场$\boldsymbol{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^{(1)}((V))$,则

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{(+S)}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

这里$(+S)$表示曲面积分是沿着曲面(S)的外法线方向,式(1)称为**高斯公式**.

若曲面(S)与平行于坐标轴的直线的交点多于两个,可用光滑曲面将有界闭区域(V)分割成若干个小区域,使得围成每个小区域的闭曲面满足定理的条件,从而高斯公式仍是成立的.

此外,根据两类曲面积分之间的关系,高斯公式也可表为

$$\iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{(S)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

这里$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是曲面(S)上点$(x,y,z)$处的外法向量的方向余弦.

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{(S)}(xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，其中(S)是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $x+y+z=1$所围成的四面体表面的外侧；

解 (1) (S)是平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体表面的外侧. 设(V)是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体，(σ_z)为(V)与平行于 xOy 的平面 $z=z$ 相交而成的区域，应用高斯公式，则有

$$
\begin{aligned}
&\oiint\limits_{(S)}(xy\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\
&=\iiint\limits_{(V)}(y+z+x)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{(V)}z\mathrm{d}V\\
&=3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{(\sigma_z)}\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z\\
&=\frac{3}{2}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

(2) $\oiint\limits_{(S)}(x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，其中(S)是立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 表面的外侧；

(2) (S)是立方体 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$ 表面的外侧. 设(V)是立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a$，$(\sigma_z)$为(V)与平行于 xOy 的平面 $z=z$ 相交而成的区域，应用高斯公式，则有

$$
\begin{aligned}
&\oiint\limits_{(S)}(x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\
&=\iiint\limits_{(V)}2(x+y+z)\mathrm{d}V\\
&=6\iiint\limits_{(V)}z\mathrm{d}V\\
&=6\int_0^a z\mathrm{d}z\iint\limits_{(\sigma_z)}\mathrm{d}\sigma\\
&=6a^2\int_0^a z\mathrm{d}z=3a^4.
\end{aligned}
$$

(3) $\oiint\limits_{(S)} (x^3\,dy\wedge dz + y^3\,dz\wedge dx + z^3\,dx\wedge dy)$，其中$(S)$是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧；

(3) (S)球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 设(V)是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，(σ_z)为(V)与平行于 xOy 的平面 $z=z$ 相交而成的区域，应用高斯公式，则有

$$\begin{aligned}
&\oiint\limits_{(S)} (x^3\,dy\wedge dz + y^3\,dz\wedge dx + z^3\,dx\wedge dy)\\
&= \iiint\limits_{(V)} 3(x^2+y^2+z^2)\,dV\\
&= 9\iiint\limits_{(V)} z^2\,dV = 9\int_{-R}^{R} z^2\,dz \iint\limits_{(\sigma_z)} d\sigma\\
&= 18\pi\int_0^R z^2(R^2-z^2)\,dz = \frac{12}{5}\pi R^5.
\end{aligned}$$

(4) $\iint\limits_{(S)}[(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2xz)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]$，其中(S)是以原点为圆心、$a$ 为半径的上半球面的上侧；

(4) 由于(S)是以原点为圆心、a 为半径的上半球面的上侧，记 xOy 平面上以原点为圆心、a 为半径的圆域为(S_1)，(V)是以(S)和(S_1)为边界曲面的半球体，则可利用高斯公式有

$$\iint\limits_{(+S)}[(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2zx)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]+\iint\limits_{(-S_1)}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{(V)}-2z\mathrm{d}V,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)}[(x^2-2xy)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-2yz)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(1-2zx)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]\\
&=\iiint\limits_{(V)}-2z\mathrm{d}V+\iint\limits_{(+S_1)}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iiint\limits_{(V)}z\mathrm{d}V+\pi a^2\\
&=-2\int_0^a z\mathrm{d}z\iint\limits_{\sigma}\mathrm{d}\sigma+\pi a^2=-2\int_0^a z\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z+\pi a^2\\
&=-\frac{\pi a^4}{2}+\pi a^2.
\end{aligned}$$

(6) $\oiint\limits_{(S)} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$，其中(S)是圆锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的边界曲面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面(S)的外法向量的方向余弦；

(6) (S)是圆锥体 $x^2+y^2\leqslant z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的边界曲面，指向外侧，则有

$$\begin{aligned}
&\oiint\limits_{(S)} [x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma]\,\mathrm{d}S \\
&= \iiint\limits_{(V)} 2(x+y+z)\,\mathrm{d}V \\
&= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h \rho\,\mathrm{d}\rho\int_\rho^h(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^h(\rho h^2-\rho^3)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\pi h^4.
\end{aligned}$$

斯托克斯公式

定理 1 设曲面(S)是一分片光滑的有向曲面且其边界(C)是分段光滑的有向闭曲线，它们的正向符合右手螺旋法则. 并设函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在曲面(S)以及曲线(C)上有连续偏导数，则

$$\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\oint_{(C)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z, \tag{1}$$

式(1)称为**斯托克斯公式**. 为了便于记忆，斯托克斯公式常写成如下形式：

$$\iint_{(S)}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{(C)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

$$\iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint\limits_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

利用两类曲面积分之间的关系,斯托克斯公式也可写成

$$\iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \oint\limits_{(C)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

空间曲线积分与路径无关的条件

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y};$$

(2) 应用格林公式、斯托克斯公式、高斯公式计算积分应注意的问题

首先,要注意公式成立的条件:一是积分曲线或积分曲面的闭性,二是积分曲线、积分曲面所围区域的方向性,三是被积表达式中的函数在区域上处处有一阶连续偏导数.条件不具备时,不能直接应用公式.

1. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_{(C)}(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z)$，其中(C)是圆：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，其方向与平面 $x+y+z=0$的法向量，及 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$构成右手系；

解 (1) 平面 $x+y+z=a$ 其法线方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\oint_{(C)}(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z)=\iint_{(S)}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\iint_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(3) $\oint_{(C)}(3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z)$，其中(C)是圆周：$x^2+y^2=2z, z=2$ 方向为从 z 轴正向看去的逆时针方向；

(3) 平面 $z=2$ 的法线方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=0,\quad \cos\gamma=1,$$

于是可得

$$\oint_{(C)}(3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z)=\iint_{(S)}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3y & -xz & yz^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\iint_{(S)}5\mathrm{d}S=-20\pi.$$

(4) $\oint_{(C)}[(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z]$,其中$(C)$是三角形边界从点$(a,0,0)$穿过点$(0,a,0)$和$(0,0,a)$最后回到点$(a,0,0)$,$(a>0)$.

(4) 过点$(0,a,0)$,$(0,0,a)$和$(a,0,0)$的平面$x+y+z=a$其法线方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\oint_{(C)}[(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z]$$

$$=\iint_{(S)}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & y-x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$