

第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)

在研究各种物理场时,不仅要考虑量的大小,还要考虑方向.为此引入与方向有关的另一类曲线积分——对坐标的曲线积分,该积分也称为向量场的曲线积分.

给定平面上的有向曲线 (C) , $\mathbf{n}=(\cos \alpha, \cos \beta)$ 为有向曲线 (C) 在点 (x, y) 处与曲线方向一致的单位切向量. 设 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 分别为 x, y 方向的单位向量, 向量场 $\mathbf{A}(x, y)=P(x, y)\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}$ 定义在曲线 (C) 上, 则有

$$\int_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(C)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{(C)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds.$$

平面上的第二类曲线积分在实际应用中常出现的形式是

$$\int_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(C)} P(x, y) dx + \int_{(C)} Q(x, y) dy.$$

给定空间有向曲线 (C) , $\mathbf{n}=(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是有向曲线 (C) 上点 (x, y, z) 处与曲线方向一致的单位切向量. 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}$, 则有

$$\begin{aligned}
& \int_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\
&= \int_{(C)} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos r] ds.
\end{aligned}$$

第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)的性质

以平面上有向曲线 (C) 上的积分为例.

性质 1 设 (C) 是平面上的有向曲线弧, $(-C)$ 是与 (C) 方向相反的有向曲线弧,则

$$\int_{(-C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

即第二类曲线积分与积分弧段的方向有关.

性质 2 设平面上的有向曲线 (C) 由 (C_1) 和 (C_2) 两段光滑曲线组成,则

$$\int_{(C)} P dx + Q dy = \int_{(C_1)} P dx + Q dy + \int_{(C_2)} P dx + Q dy.$$

设函数 f 在曲线 (C) 上连续.

① 设平面上的有向曲线 (C) 的方程为 $x=x(t), y=y(t)$, 其方向为从 $t=\alpha$ 到 $t=\beta$, 则

$$\int_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt.$$

若平面上的有向曲线 (C) 的方程为 $y=y(x)$, 起点的横坐标为 $x=a$, 终点的横坐标为 $x=b$, 则

$$\int_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\} dx.$$

若平面上的有向曲线 (C) 的方程为 $x=x(y)$, 起点的纵坐标为 $y=c$, 终点的纵坐标为 $y=d$, 则

$$\int_{(C)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\} dy.$$

② 设 (C) 是一条有向空间曲线, $\mathbf{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 为定义在该曲线上的连续向量值函数,

$$\int_{(C)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

表示该空间曲线上的第二类曲线积分. 若记 $d\mathbf{r}=(dx,dy,dz)$ 为定向弧长元素(有向曲线元), 则第二类曲线积分可以表示为

$$\int_{(C)} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{r}.$$

若空间有向曲线 (C) 的参数方程为
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$
其中方向为从起点 $t=a$ 到终点 $t=b$, 则

$$\int_{(C)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

第一类曲线积分和第二类曲线积分的联系

给定空间中一有向曲线(C),其参数方程为
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$
其中方向为从起点 $t=a$ 到终点 $t=b$.

b. 其切向量 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t), y'(t), z'(t))$, 单位切向量 $\boldsymbol{e}_\tau=(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 弧长元素为 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$, 有向弧长元素为

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= (dx, dy, dz) = (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt) = (x'(t), y'(t), z'(t))dt \\ &= \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}}, \frac{z'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}} \right) ds \\ &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds = \boldsymbol{e}_\tau ds, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}& \int_{(C)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\&= \int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(C)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\tau ds \\&= \int_{(C)} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds \\&= \int_{(C)} \frac{P(x, y, z)x'(t) + Q(x, y, z)y'(t) + R(x, y, z)z'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} ds,\end{aligned}$$

此等式表明第二类曲线积分可以化为第一类曲线积分.

8. 计算曲线积分 $\int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, 其中 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ 且积分路径(C)为

(1) 从点(1,0)到点(0,1)的直线段;

(2) 沿圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分从点(1,0)到点(0,1)的曲线;

解 (1) 从点(1,0)到点(0,1)的直线段(C)的方程为 $x + y = 1$, 则

$$\int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(C)} (ydx - xdy) = \int_1^0 [(1-x)dx - x d(1-x)] = \int_1^0 dx = -1.$$

(2) 考虑从点(1,0)到点(0,1)沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上半部分(C)的曲线积分, 有

$$\int_{(C)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(C)} (ydx - xdy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin \theta d\cos \theta - \cos \theta d\sin \theta] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1) dt = -\frac{\pi}{2}.$$

9. 计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\int_{(C)} (x^2 dx + y^2 dy)$, 其中曲线(C)是沿着曲线 $y=\sqrt{x}$ 从点(0,0)到点(1,1)的一段；

(2) $\int_{(C)} (y^2 dx + x^2 dy)$, 其中曲线(C)是沿着曲线 $y=x^3$ 从点(0,0)到点(1,1)的一段；

(3) $\int_{(C)} [xydx + (y-x)dy]$, 其中曲线(C)是从点(0,0)到点(1,1)分别沿着下列曲线产

生的，

① 直线 $y=x$,

② 抛物线 $y=x^2$,

③ 立方抛物线 $y=x^3$;

解 (1) 由于曲线(C)是沿着曲线 $y=\sqrt{x}$ 从点(0,0)到点(1,1)的一段,则

$$\int_{(C)} (x^2 dx + y^2 dy) = \int_0^1 (2y^5 dy + y^2 dy) = \left(\frac{1}{3} y^6 + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(2) 由于曲线(C)是沿着曲线 $y=x^3$ 从点(0,0)到点(1,1)的一段,则

$$\begin{aligned} \int_{(C)} (y^2 dx + x^2 dy) &= \int_0^1 (x^6 dx + x^2 3x^2 dx) \\ &= \int_0^1 (x^6 + 3x^4) dx = \left(\frac{1}{7} x^7 + \frac{3}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{3}{5} = \frac{26}{35}. \end{aligned}$$

(3) ① 曲线(C) 是沿着直线 $y=x$ 从点(0,0)到点(1,1),则有

$$\int_{(C)} [xy dx + (y-x) dy] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

② 曲线(C)是沿着抛物线 $y=x^2$ 从点(0,0)到点(1,1),则有

$$\int_{(C)} [xy dx + (y-x) dy]$$

$$= \int_0^1 [x^3 dx + (x^2 - x) \cdot 2x dx]$$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx$$

$$= \frac{3}{4}x^4 \Big|_0^1 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12};$$

③ 曲线(C)是沿着立方抛物线 $y=x^3$ 从点(0,0)到点(1,1),则有

$$\begin{aligned}& \int_{(C)} [xydx + (y-x)dy] \\&= \int_0^1 [x^4dx + (x^3-x) \cdot 3x^2dx] \\&= \int_0^1 (3x^5 + x^4 - 3x^3)dx \\&= \left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

(4) $\oint_{(C)} (ydx - xdy)$, 其中曲线(C)是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 沿着正向;

(4) 曲线(C)是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)沿着正向,则有

$$\oint_{(C)} (ydx - xdy) = \int_0^{2\pi} (-b \sin t a \sin t - a \cos t b \cos t) dt = -ab \int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

(5) $\int_{(C)} [xdx + ydy + (x + y - z)dz]$, 其中曲线(C)是空间中从点(1,1,1)到点(2,3,4)的直线段;

(5) 曲线(C)是空间中从点(1,1,1)到点(2,3,4)的直线段, 令 $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t$, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{(C)} [xdx + ydy + (x + y - z)dz] \\ &= \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3] dt \\ &= \int_0^1 (5t + 6) dt = \left(6t + \frac{5}{2}t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

(6) $\int_{(C)} [(y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz]$, 其中曲线(C)是弧段 $x=t, y=t^2, z=t^3, (0 \leq t \leq 1)$,

其正向为 t 增加的方向;

(6) 曲线(C)是弧段 $x=t, y=t^2, z=t^3 (0 \leq t \leq 1)$, 且其正向为 t 增加的方向, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{(C)} [(y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz] \\ &= \int_0^1 [(t^4 - t^6)dt + 4t^6dt - 3t^4dt] \\ &= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt \\ &= \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

(7) $\oint_{(C)} [(z-y) dx + (x-z) dy + (x-y) dz]$, 其中曲线 (C) 是 xOy 平面上的圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 沿着逆时针方向;

(7) 曲线 (C) 是 xOy 平面上的圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 且沿着逆时针方向, 则有

$$\begin{aligned} & \oint_{(C)} [(z-y) dx + (x-z) dy + (x-y) dz] \\ &= \oint_{(C)} (-y dx + x dy) = \int_0^{2\pi} (\sin t \sin t + \cos t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

11. 把第二类曲线积分 $\int_{(C)} [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz]$ 化为第一类曲线

积分, 其中 (C) 为弧 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(0, 0, 0)$ 的一段.

解 由 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 得

$$dx=dt, \quad dy=2tdt=2xdx, \quad dz=3t^2dt=3ydx, \quad ds=\sqrt{1+4x^2+9y^2}dt,$$

故

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},$$

由于 (C) 为从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(0, 0, 0)$ 的一段, 所以

$$e_t = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, -\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}, -\frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} \right), \text{ 且}$$
$$\int_{(C)} (Pdx + Qdy + Rdz) = - \int_{(C)} \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}} ds.$$

格林公式及其应用

若二元函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在区域 (σ) 上有连续偏导数, 则

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{(+C)} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy],$$

其中 $(+C)$ 表示有向曲线 (C) 的方向取正向.

利用格林公式可求平面图形的面积. 若在格林公式中, 令 $P = -y, Q = x$, 得

$$2 \iint_{(\sigma)} dx dy = \oint_{(C)} x dy - y dx,$$

式(1)左端是闭区域 (σ) 的面积 A 的两倍, 因此有

$$A = \frac{1}{2} \oint_{(C)} x dy - y dx.$$

2. 平面曲线积分与路径无关的定义与条件

定理 2 设平面有界区域 (σ) 是一个单连通区域, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 (σ) 内具有一阶连续偏导数, 则下列命题等价:

- (1) 曲线积分 $\int_{(C)} Pdx + Qdy$ 在 (σ) 内与积分路径无关, 只与起点和终点有关;
- (2) 在区域 (σ) 中, 表达式 $Pdx + Qdy$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分;
- (3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在区域 (σ) 内恒成立;
- (4) 对区域 (σ) 内任一闭曲线 (C) , 有 $\int_{(C)} Pdx + Qdy = 0$.

1. 应用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{(+C)} (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$, 其中有向曲线 $(+C)$ 是以点 $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$

为顶点的三角形的边界;

解 下面求解时设积分值为 I .

(1) 由于有向曲线 $(+C)$ 是以点 $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$ 为顶点的三角形的边界, 可得

$$P = (x+y)^2, \quad Q = -(x^2+y^2), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 2y,$$

故

$$I = \iint_{(\sigma)} -4x - 2y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-4x - 2y) dy = 1.$$

(2) $\oint_{(+C)} (x^3 - 3y)dx + 3(x + ye^y)dy$, 其中有向曲线 $(+C)$ 是由 $y=0, x+y=1$ 及 $x^2 + y^2 = 1$

$(x \leq 0, y \geq 0)$ 围成的区域的边界;

(2) 由于有向曲线 $(+C)$ 是由 $y=0, x+y=1$ 及 $x^2 + y^2 = 1 (x \leq 0, y \geq 0)$ 围成的区域的边界, 可得

$$P = x^3 - 3y, \quad Q = 3(x + ye^y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6,$$

故

$$I = \iint_{(\sigma)} 6 dx dy = 6 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = 3 + \frac{3}{2}\pi.$$

(3) $\oint_{(+C)} (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$, 其中有向曲线 $(+C)$ 是圆周 $x^2 + y^2 = 4$;

(3) 由题意可知 $P = (1-x^2)y$, $Q = x(1+y^2)$, 故而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + y^2 - (1 - x^2) = x^2 + y^2,$$

有向曲线 $(+C)$ 是圆周 $x^2 + y^2 = 4$, 向径 $\mathbf{r} = (x, y)$, 故

$$I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{r} d\mathbf{r} = 2\pi \left. \frac{\mathbf{r}^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi}{2} R^4.$$

(4) $\oint_{(+C)} (x+y)dx - (x-y)dy$, 其中有向曲线 $(+C)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$);

(4) 由题意可知 $P = x + y$, $Q = -(x - y)$, 故而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2,$$

有向曲线 $(+C)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), 且椭圆区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 的面积为 πab , 可得

$$I = \iint_{(\sigma)} -2 dx dy = -2 \iint_{(\sigma)} dx dy = -2\pi ab.$$

(5) $\int_{(C)} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy$, 其中有向曲线(C)是从点 $A(a, 0)$ 到点 $O(0, 0)$

的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax, m$ 是常数, $a > 0$;

(5) 在 x 轴上连接点 $O(0, 0)$ 与 $A(a, 0)$, 这样便构成封闭的半圆形 $\widehat{AMOA}$, 且在线段 OA 上

$$\int_{(OA)} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy = 0,$$

则

$$\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy = \int_{\widehat{AMOA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy,$$

利用格林公式得

$$\int_{\widehat{AMOA}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - mx) dy = \iint_{(\sigma)} 0 dx dy = 0.$$

利用积分与路径无关来计算下列曲线积分：

$$(1) \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy);$$

$$(2) \int_{(0,0)}^{(1,1)} \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy;$$

与积分路径无关，则可以选择一条好积分的路径

(1) 选 $x=1, -1 \leq y \leq 1$

(2) 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，所以积分与路径无关。设积分路径 (C) 为折线 $(C_1) + (C_2)$ ，

其中 $(C_1): y=0, 0 \leq x \leq 1$, $(C_2): x=1, 0 \leq y \leq 1$ ，则

$$I = \int_0^1 \frac{0}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^1 \frac{e^y}{1+1} dy = \frac{e^y}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

$$(3) \int_{(1,1)}^{(3,3e)} \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) dx + \frac{x}{y} dy, \text{沿任一条不通过原点的路径;}$$

(3) 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $P = \ln \frac{y}{x} - 1$, $Q = \frac{x}{y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = 0$, 可知积分与路径无关. 设积分路径 (C) 为折线 $(C_1) + (C_2)$, 其中 $(C_1): y=1, 1 \leq x \leq 3$, $(C_2): x=3, 1 \leq y \leq 3e$, 从而

$$\begin{aligned} & \int_{(1,1)}^{(3,3e)} \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) dx + \frac{x}{y} dy \\ &= \int_1^3 \left(\ln \frac{1}{x} - 1 \right) dx + \int_1^{3e} \frac{3}{y} dy \\ &= \int_1^3 (-\ln x - 1) dx + 3 \ln y \Big|_1^{3e} \\ &= -x \ln x \Big|_1^3 + 3 \ln y \Big|_1^{3e} \\ &= -3 \ln 3 + 3 \ln 3e = 3. \end{aligned}$$

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 沿任一条不通过原点的路径;

(4) 显然, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$, 于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} d(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

(5) $\int_{(C)} (1 + xe^{2y})dx + (x^2 e^{2y} - y)dy$, 其中积分路径(C)是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(4,0)$ 的上半

圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 4$;

$$(5) \quad P = 1 + xe^{2y}, \quad Q = x^2 e^{2y} - y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^{2y} - 2xe^{2y} = 0,$$

可知积分与路径无关.

设 (C_1) 为 x 轴上从 $O(0,0)$ 到点 $A(4,0)$ 直线段, 从而

$$\int_{(C)} (1 + xe^{2y})dx + (x^2 e^{2y} - y)dy = \int_{(C_1)} (1 + xe^{2y})dx + (x^2 e^{2y} - y)dy = \int_0^4 (1 + x)dx = 12.$$