第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)的计算

设函数 f 在曲线(C)上连续.

① 若平面曲线(C)的方程为:$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $x(t)$, $y(t)$ 存在连续导数, 且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2 \neq 0$. 则

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

如果平面曲线(C)的方程为 $y=y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 则

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{a}^{b} f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

如果平面曲线(C)的方程为 $x=x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, 则

$$\int_{(C)} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{c}^{d} f[x(y),y]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y.$$

② 若空间曲线(C)的方程为：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$，$\varphi(t)$，$\psi(t)$，$\omega(t)$有连续导数，且$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2\neq 0$，则有

$$\int_{(C)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

注意 第一类曲线积分转化的定积分后，定积分的上下限一定满足：积分下限≤积分上限.

1. 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\int_{(C)}(x+y)\mathrm{d}s$，其中曲线$(C)$是抛物线 $y=2x^2$ 在点$(0,0)$与$(1,2)$之间的一段；

解 计算第一曲线积分，关键是正确求出弧长微元. 同时注意，定积分上限必须大于下限.

(1) $\mathrm{d}s=\sqrt{[1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+16x^2}\mathrm{d}x$，

$$\int_{(C)}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1(x+2x^2)\sqrt{1+16x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1+16x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 2x^2\sqrt{1+16x^2}\mathrm{d}x,$$

其中，$\int_0^1 x\sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{32}\int_0^1\sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}(1+16x^2)$

$$=\frac{1}{32}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)(1+16x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{48}(17\sqrt{17}-1),$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+16+x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sec^2t\mathrm{d}t]{x=\frac{\tan t}{4}}\int_0^{\arctan 4}\frac{\tan^2 t}{8}\cdot\sec t\cdot\frac{\sec^2 t}{4}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{32}\int_0^{\arctan 4}(\sec^2 t-1)\sec^3 t\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\left(\int_0^{\arctan 4}\sec^5 t\mathrm{d}t-\int_0^{\arctan 4}\sec^3 t\mathrm{d}t\right).$$

因为 $\int_0^{\arctan 4}\sec^3 t\mathrm{d}t=\int_0^{\arctan 4}\sec t\mathrm{d}\tan t$

$$=\frac{1}{2}(\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)\Big|_0^{\arctan 4}$$

$$=\frac{1}{2}(4\sqrt{17}+\ln|4+\sqrt{17}|),$$

$$\int_0^{\arctan 4} \sec^5 t\mathrm{d}t = \int_0^{\arctan 4} \sec^3 t\mathrm{d}(\tan t) = \sec^3 t\tan t \Big|_0^{\arctan 4} - \int_0^{\arctan 4} \tan t\mathrm{d}(\sec^3 t)$$

$$= \frac{\sec^3 t \tan t}{4} + \frac{3\sec t\tan t}{8} + \frac{3\ln|\sec t + \tan t|}{8} \Big|_0^{\arctan 4}$$

$$= \frac{4\times 17\sqrt{17}}{4} + \frac{3\times\sqrt{17}\times 4}{8} + \frac{3\ln(\sqrt{17}+4)}{8}$$

$$= \frac{37\sqrt{17}}{2} + \frac{3}{8}\ln(4+\sqrt{17}),$$

所以

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln|4+\sqrt{17}|+\frac{37}{2}\sqrt{17}+\frac{3}{8}\ln|4+\sqrt{17}$$

$$=\frac{41\sqrt{17}}{2}+\frac{7}{8}\ln|4+\sqrt{17}|,$$

所以原积分

$$\int_{(C)}(x+y)\,\mathrm{d}S=\frac{17}{48}-\frac{1}{48}+\frac{4\sqrt{17}}{2}+\frac{7}{8}\ln|4+\sqrt{17}|$$

$$=\frac{113}{48}\sqrt{17}-\frac{1}{48}+\frac{7}{8}\ln|4+\sqrt{17}|.$$

(2) $\oint_{(C)}(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中曲线$(C)$是圆 $x^2+y^2=a^2$，$(a>0)$；

(3) $\int_{(C)}xyz\mathrm{d}s$，其中曲线(C)是在$(0,0,0)$与$(1,1,1)$之间的直线段；

(2) 由于曲线(C)的弧长为 $2\pi a$，即$\oint_{(C)}\mathrm{d}s=2\pi a$，所以

$$\oint_{(C)}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\oint_{(C)}a^2\mathrm{d}s=2\pi a^3.$$

(3) 令 $x=t,y=t,z=t$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}\mathrm{d}t$，可得

$$\int_{(C)}xyz\mathrm{d}s=\int_0^1 t^3\sqrt{3}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{4}t^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(4) $\int_{(C)} \sqrt{x}\,\mathrm{d}s$，其中曲线(C)是抛物线 $y=\sqrt{x}$在点(0,0)与点(1,1)之间的一段；

(4) $\mathrm{d}s = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x$,则有

$$\int_{(C)} \sqrt{x}\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

(5) $\int_{(C)}(x+2y+3z)\mathrm{d}s$，其中曲线$(C)$是圆$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2,\\ z=1;\end{cases}$

(5) 令 $x=\cos t, y=\sin t, z=1$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$，

$$\int_{(C)}(x+2y+3z)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(\cos t+2\sin t+3)\mathrm{d}t=(\sin t-2\cos t+3t)\Big|_0^{2\pi}=6\pi.$$

(6) $\oint_{(C)}(x+y)\mathrm{d}s$，其中曲线$(C)$是以$(0,0)$，$(1,0)$和$(0,1)$为顶点的三角形的边界；

(6) 令 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，则

$$\oint_{(C)}(x+y)\mathrm{d}s=\int_{\overset{\frown}{OA}}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{\overset{\frown}{BO}}(x+y)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=1+\sqrt{2}.$$

(7) $\int_{(C)} z\mathrm{d}s$，其中曲线(C)是锥形螺旋线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$上的一段；

(8) $\oint_{(C)} y^2\mathrm{d}s$，其中曲线$(C)$是圆$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

(7) $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\int_{(C)} z\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}(2+t^2)=\frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\left[\left(2+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right].$$

(8) 由对称性得

$$\oint_{(C)} x^2\mathrm{d}s=\oint_{(C)} y^2\mathrm{d}s=\oint_{(C)} z^2\mathrm{d}s,$$

所以

$$\oint_{(C)} y^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_{(C)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\oint_{(C)}\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\times 4\pi=\frac{16}{3}\pi.$$

2. 推导如下的极坐标下对弧长的曲线积分的计算公式：

$$\int_{(C)} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f[\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

其中积分曲线(C)的方程由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$给出.

解 由直角坐标与极坐标的关系,可令 $x=\rho(\theta)\cos\theta, y=\rho(\theta)\sin\theta$,其中 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则

$$x'(\theta)=\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta,\quad y'(\theta)=\rho'(\theta)\sin\theta+\rho'(\theta)\cos\theta.$$

故而,

$$\begin{aligned}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}&=\sqrt{[\rho'(\theta)]^2\cos^2\theta+\rho^2(\theta)\sin^2\theta+[\rho'(\theta)]^2\sin^2\theta+\rho^2(\theta)\cos^2\theta}\\&=\sqrt{[\rho'(\theta)]^2+\rho^2(\theta)},\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{(C)}f(x,y)\mathrm{d}s&=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{[\rho^2(\theta)]+[\rho'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$