1. 二重积分应用

(1) 曲面面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出,平面区域(σ_{xy})为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域,函数 $f(x,y)$ 在(σ_{xy})上具有一阶连续偏导数,则曲面面积

$$A=\iint_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

1. 曲面(S)为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截下的部分,求曲面(S)的面积.

解 由已知锥面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,令 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,可知

$$\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{y^2+x^2}}=\sqrt{2},$$

故曲面面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

由所求面积为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截而得，易知所截部分在 xOy 平面的投影区域如 A 组题 1 图所示，可表示为

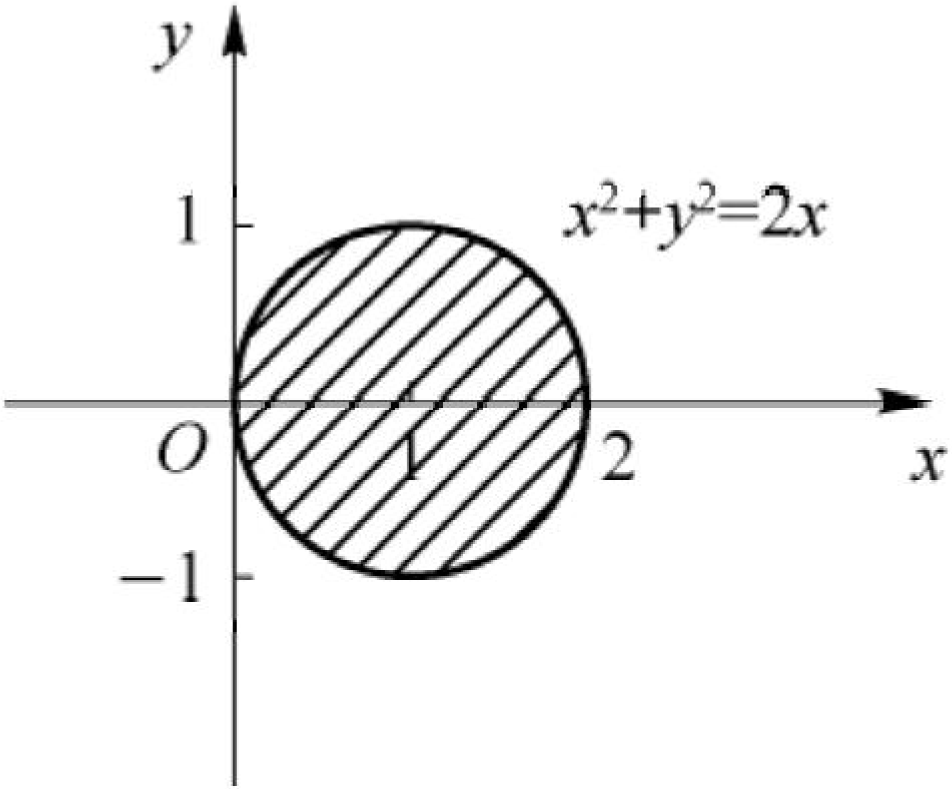
$$(\sigma_{xy})=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}=\{(\rho,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta\},$$

所以可得

$$A=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho^2\right)\Bigg|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{2}\pi.$$



y
1
$x^2+y^2=2x$
O
1
2
x
−1

2. 曲面(S)为由 $x^2+y^2+z^2=4(x\geqslant 0)$ 和 $x^2+y^2=2x$ 为边界所围成的立体表面，求曲面(S)的面积.

解 该立体的表面由三部分曲面组成，即$(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)$，其中

$$(S_1)=\{(x,y,z)\mid z=\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 2x\},$$

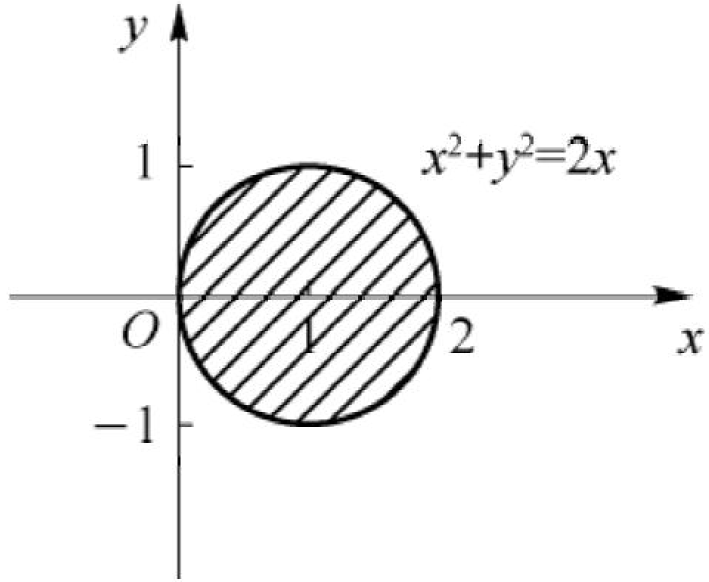
$$(S_2)=\{(x,y,z)\mid z=-\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 2x\},$$

$$(S_3)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=2x,-\sqrt{4-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\},$$

对于曲面$(S_1)=\{(x,y,z)\mid z=\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 2x\}$，可知曲面微元

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma,$$

其在 xOy 平面的投影区域



y
1
$x^2+y^2=2x$
O
1
2
x
−1

$$\sigma_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}=\{(\rho,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta\},$$

所以

$$\begin{aligned}
A_1 &= \iint\limits_{(S_1)} \mathrm{d}S = 2\iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{4-\rho^2}\,\Big|_0^{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\sqrt{4-4\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi+8\cos\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi-8,
\end{aligned}$$

由于对称性，曲面(S$_2$)的面积 $A_2=A_1$.

对于曲面(S_3)，曲面方程为 $y=\pm\sqrt{2x-x^2}$，由两块面积相等的对称性曲面组成，它在 zOx 平面的投影区域可表示为

$$D_{zx}=\{(z,x)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,-\sqrt{4-2x}\leqslant z\leqslant \sqrt{4-2x}\},$$

曲面面积微元

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{\frac{1}{2x-x^2}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

所以

$$\begin{aligned}A_3&=2\iint_{(S_3)}\mathrm{d}S=2\iint_{D_{zx}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=2\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-2x}}^{\sqrt{4-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}z\\&=4\int_0^2\frac{\sqrt{4-2x}}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x\\&=4\sqrt{2}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=4\sqrt{2}\times2\sqrt{x}\,\Big|_0^2=16,\end{aligned}$$

3. 曲面(S)为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 含在柱面 $x^2+y^2-x=0$ 内的部分,求曲面(S)的面积.

解 易知该曲面有上、下两部分,两部分面积相等.

由已知可知球面 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$ 含在柱面 $x^2+y^2-x=0$ 内的上半部分曲面为

$$(S_1)=\{(x,y,z)\,|\,z=\sqrt{1-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant x\},$$

所以，所求曲面面积微元为

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所求曲面在 xOy 平面的投影区域为

$$(\sigma_{xy})=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}=\{(\rho,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant\cos\theta\}.$$

由此可得所求曲面面积为

$$A=2\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\sqrt{1-(\cos\theta)^2}\right]\mathrm{d}\theta=2\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi-4.$$