1. 三重积分的概念

(1) 三重积分的定义

设三元函数 $f(x,y,z)$ 是空间闭区域 (V) 上的有界函数，将 (V) 任意分成 n 个小闭区域

$$(\Delta v_1),(\Delta v_2),\cdots,(\Delta v_n),$$

其中，(Δv_i) 表示第 i 个小闭区域，用 Δv_i 表示它的体积. 在每个 (Δv_i) 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$. 如果当各个小闭区域直径中的最大值 λ 趋于零时，该和式的极限总存在（与子区域 (Δv_i) 的分法及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法均无关），则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 (V) 上的**三重积分**，记作

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

即

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

其中，$f(x,y,z)$ 称为被积函数，$f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}V$ 称为体积元素，x、y 与 z 称为积分变量，(V) 称为积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和.

(2) 三重积分存在定理

若三元函数 $f(x,y,z)$在空间闭区域(V)上连续，则三重积分 $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 一定存在.

(3) 三重积分物理意义

设有一在 $Oxyz$ 空间上闭区域(V)上的物体，其在(V)内点(x,y,z)处的体密度为连续函数 $\rho(x,y,z)$，则该物体的质量 M 可用三重积分表示为

$$M = \iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

2. 三重积分的性质

二重积分的性质可推广到三重积分，考虑在空间有界闭区域(V)上可积的三元函数 $f(x,y,z)$与 $g(x,y,z)$，有如下性质：

(1) 线性性质

① $\iiint\limits_{(V)} kf(x,y,z)\mathrm{d}V = k\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V$，$k$ 是常数；

② $\iiint\limits_{(V)} [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V \pm \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\mathrm{d}V.$

(2) 积分区域可加性

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V.$$

（3）积分不等式

① 若 $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in (V)$，则

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \leqslant \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\,\mathrm{d}V;$$

② $\left|\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V\right| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}V$；

③ 若 $l \leqslant f(x,y,z) \leqslant L, \forall (x,y,z) \in (V)$，则

$$lV \leqslant \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \leqslant LV,$$

1. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{(V)} xyz\mathrm{d}V$，其中积分区域$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$；

(2) $\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)\mathrm{d}V$，其中积分区域$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 3\}$；

解 (1) 由积分区域$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$，可得

$$\iiint\limits_{(V)}(xyz)\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(xyz)\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1\cdot\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{8}.$$

（2）由积分区域$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 3\}$，可得

$$\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^3(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\left(xz+yz+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^3\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\left(3x+3y+\frac{9}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(3xy+\frac{3y^2}{2}+\frac{9y}{2}\right)\Big|_0^2\mathrm{d}x=\int_0^1(6x+5)\mathrm{d}x$$

$$=(3x^2+15x)\Big|_0^1=18.$$

(3) $\iiint\limits_{(V)} y\mathrm{d}V$，其中积分区域$(V)$是由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$，平面 $y=0, z=0$ 与 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域；

(3) 由积分区域$(V)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}, 0\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}-x\right\}$，可得

$$\iiint\limits_{(V)} y\mathrm{d}V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{y^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi x^2}{8}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}\times\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{6}\,\frac{\pi^3}{8}=\frac{\pi^3}{96}.$$

(4) $\iiint\limits_{(V)} z\mathrm{d}V$，$(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<2x, 0\leqslant z\leqslant \sqrt{4-x^2-y^2}\}$；

（方法二）在柱坐标下计算，可得

$$(V)=\{(\rho,\theta,z)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \rho\leqslant 2\cos\theta, 0\leqslant z\leqslant\sqrt{4-\rho^2}\},$$

所以

$$\iiint\limits_{(V)} z\mathrm{d}V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z\rho\,\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\left(\frac{z^2}{2}\rho\right)\Big|_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\,\frac{4-\rho^2}{2}\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{(4-4\cos^2\theta)^2-16}{8}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2-\frac{16(1-\cos^2\theta)^2}{8}\right]\mathrm{d}\theta=2\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta)^2}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi-(\frac{3}{2}\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\pi-4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{5}{4}\pi.$$

(5) $\iiint\limits_{(V)} z^2 \mathrm{dV}$,其中积分区域$(V)$是由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2+z^2=4z$ 所围成的区域;

(5) 由于积分区域(V)是由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2+z^2=4z$ 所围成,所以可得

$$
\begin{aligned}
(V) &= \{(x,y,z) \mid 0<z<2,(x,y)\in(\sigma_z)\} \\
&= \{(x,y,z) \mid 0<z<1,(x,y)\in(\sigma_{z1})\} \cup \{(x,y,z) \mid 1<z<2,(x,y)\in(\sigma_{z2})\},
\end{aligned}
$$

其中$(\sigma_{z1})=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4-(z-2)^2\}$，$(\sigma_{z2})=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4-z^2\}$，

由此可得

$$I=\iiint\limits_{(V)} z^2\,\mathrm{d}V=\int_0^1 z^2\left(\iint\limits_{(\sigma_{z1})}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}z+\int_1^2 z^2\left(\iint\limits_{(\sigma_{z2})}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}z.$$

由 $\iint\limits_{(\sigma_{z1})}\mathrm{d}\sigma$ 和 $\iint\limits_{(\sigma_{z2})}\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义为平面区域(σ_{z1})和(σ_{z2})的面积，易知

$$\iint\limits_{(\sigma_{z1})}\mathrm{d}\sigma=\pi[4-(z-2)^2],\quad \iint\limits_{(\sigma_{z2})}\mathrm{d}\sigma=\pi(4-z^2),$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\pi\int_0^1 z^2[4-(z-2)^2]\mathrm{d}z+\pi\int_1^2 z^2(4-z^2)\mathrm{d}z\\&=\pi\left(z^4-\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^1+\pi\left(\frac{4}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_1^2\\&=\frac{4\pi}{5}+\frac{47\pi}{15}=\frac{59\pi}{15}.\end{aligned}$$

(6) $\iiint\limits_{(V)} x^2 \mathrm{d}V$,其中积分区域$(V)$是由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=2x$ 所围成的区域;

(6) 由积分区域(V)是由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=2x$ 所围成的区域，可得

$$(\sigma_{x1})=\{(y,z)\mid y^2+z^2\leqslant 1-(x-1)^2\},\quad (\sigma_{x2})=\{(y,z)\mid y^2+z^2\leqslant 1-x^2\},$$

由此可知：

$$I=\iiint\limits_{(V)} x^2\,\mathrm{d}V=\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\Big(\iint\limits_{(\sigma_{x_1})}\mathrm{d}\sigma\Big)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\Big(\iint\limits_{(\sigma_{x_2})}\mathrm{d}\sigma\Big)\mathrm{d}x.$$

由 $\iint\limits_{(\sigma_{x_1})}\mathrm{d}\sigma$ 和 $\iint\limits_{(\sigma_{x_2})}\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义为平面区域(σ_{x_1})和(σ_{x_2})的面积，易知

$$\iint\limits_{(\sigma_{x_1})}\mathrm{d}\sigma=\pi[1-(x-1)^2],\quad \iint\limits_{(\sigma_{x_2})}\mathrm{d}\sigma=\pi(1-x^2),$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2[1-(x-1)^2]\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2(1-x^2)\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^4)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^2-x^4)\mathrm{d}x\\&=\pi\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=\frac{\pi}{40}+\frac{47\pi}{480}=\frac{59\pi}{480}.\end{aligned}$$

(7) $\iiint\limits_{(V)} xyz\mathrm{d}V$,其中积分区域(V)是由 $x^2+y^2+z^2=1$,$x=0$,$y=0$ 及 $z=0$ 所围成的且在第一卦限内的区域;

(7)(方法一) 由积分区域(V)是由 $x^2+y^2+z^2=1$,$x=0$,$y=0$ 及 $z=0$ 所围成的第一卦限内的区域,可知(V)为八分之一的球体.

令

$$(D)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\},$$

用直角坐标计算可得

$$\iiint\limits_{(V)} xyz\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{(D)} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\iint\limits_{(D)} xy(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} [(1-x^2)y - y^3]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}x(1-x^2) - \frac{1}{2}x^3(1-x^2) - \frac{1}{4}x(1-x^2)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{48}.$$

（方法二） 在球坐标下计算，积分区域可以表示为

$$(V)=\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\},$$

由

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \mathrm{d}V=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{(V)}xyz\,\mathrm{d}V&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\sin^3\varphi\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^3 \varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \mathrm{d} \sin \varphi$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (\sin^4 \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

(8) $\iiint\limits_{(V)} xy\,\mathrm{d}V$，其中积分区域$(V)$是由 $x^2+y^2=1$ 和平面 $z=0,z=1,x=0,y=0$ 所围成的且在第一卦限内的区域.

(8) 由于(V)是由柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $z=0,z=1,x=0,y=0$ 所围成的第一卦限内的区域，在直角坐标下和柱面坐标下，该区域分别可以表示为

$$(V)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\}$$

$$=\{(\rho,\theta,z)\mid 0\leqslant \theta\leqslant \frac{\pi}{2},0\leqslant \rho\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\},$$

故而，在直角坐标系下计算有

$$\iiint_{(V)} xy\,\mathrm{d}V = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y\int_0^1 \mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x\,\frac{(\sqrt{1-x^2})^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

在柱面坐标系下计算有

$$\iiint_{(V)} xy\,\mathrm{d}V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^1 \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta)\int_0^1 \mathrm{d}\left(\frac{\rho^4}{4}\right) = \frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$