空间曲面与曲线

一、曲面及其方程

二、旋转曲面

三、二次曲面举例

四、空间曲线

一、曲面及其方程

曲面讨论的两个基本问题是：

（1）已知曲面的形状，建立这曲面的方程；

（2）已知一个三元方程，研究这方程的图形.

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$,之间存在如下关系：

（1）曲面S上任一点的坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$,

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程, 满足方程的点都在曲面上.

称$F(x,y,z)=0$,为曲面S的方程,

而曲面S称为方程的图形.

1. 球面方程

例1. 求动点到定点 $M_0(x_0、y_0、z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x、y、z)$ 依题意 $|M_0M|=R$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$

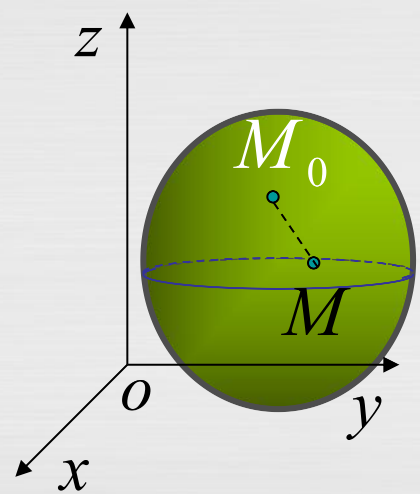
故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

特别, 当 M_0 在原点时, 球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面.



$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 称为球面的一般方程.

特点:

(1) 是关于x,y,z的二次方程,

(2) 它的 x^2, y^2, z^2 三项系数相等,

并且方程中没有xy,xz,yz项.

例2. 研究方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$表示怎样的曲面.

解: 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示：球心为$M_0(1,-2,0)$

半径为$\sqrt{5}$ 的球面.

说明：如下形式的三元二次方程($A\neq 0$)

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

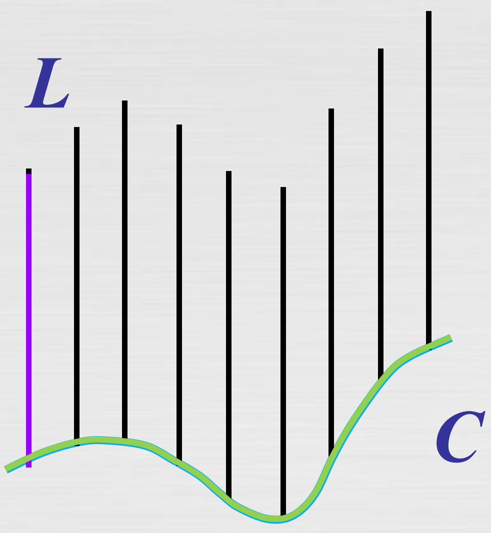
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

一个球面、或点、 或虚轨迹.

2. 柱面

动直线 L 沿给定曲线 C 平行移动形成的曲面，称为柱面，动直线 L 称为柱面的母线，定曲线 C 称为柱面的准线.

不含变量 z 的方程 $f(x,y)=0$ 在空间表示以 xoy 坐标面上的曲线为准线,平行于 z 轴的直线为母线的柱面.



类似地, 不含变量 x 的方程

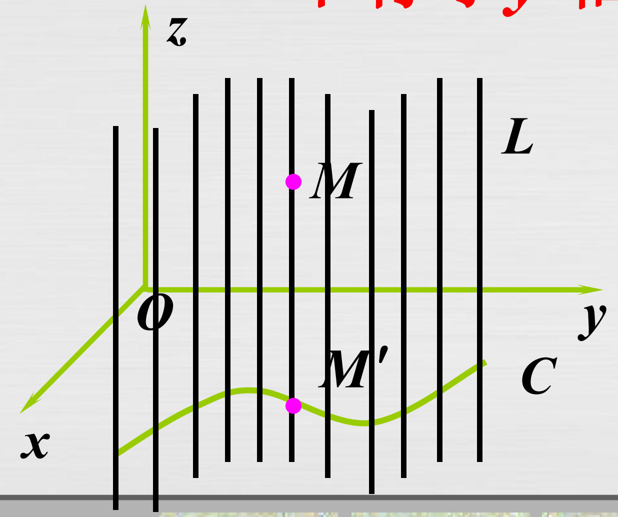
$$f(y, z) = 0$$

在空间表示以 yoz 坐标面上的曲线为准线，平行于 x 轴的直线为母线的柱面.

而不含变量 y 的方程

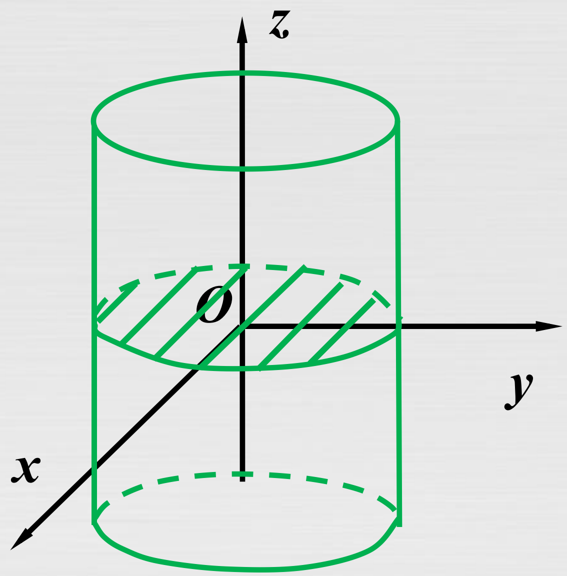
$$f(x, z) = 0$$

在空间表示以 xoz 坐标面上的曲线为准线，平行于y 轴的直线为母线的柱面.

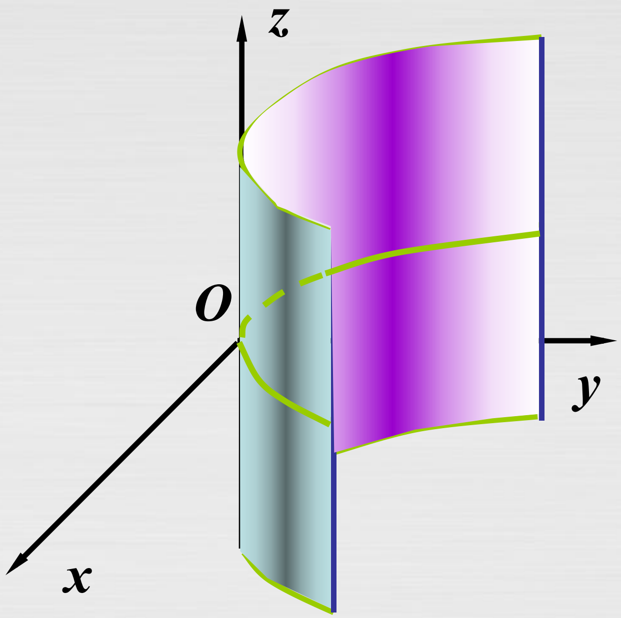


例如方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间表示以 xoy 坐标面

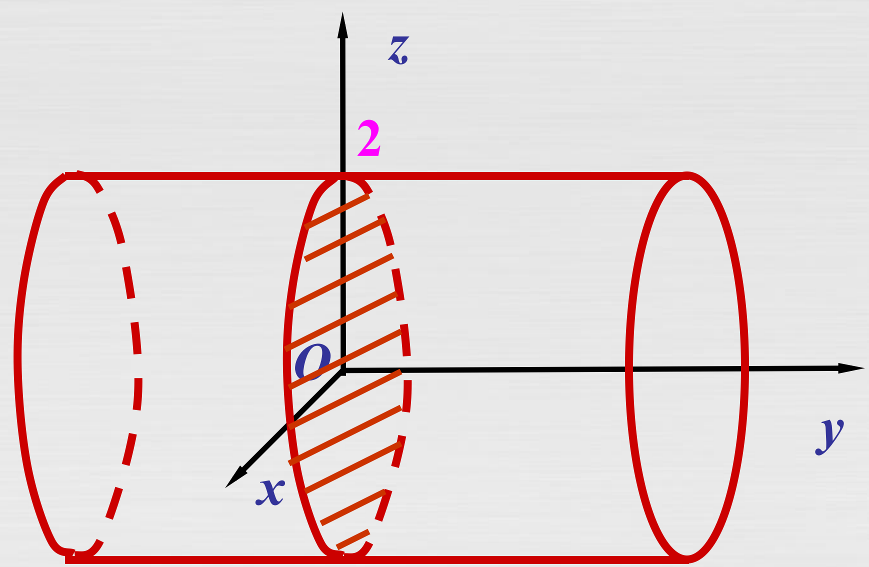
上的圆为准线、平行于 z 轴的直线为母线的柱面.



方程 $y=x^2$ 在空间表示以 xoy 坐标面上的抛物线为准线、平行于z 轴的直线为母线的柱面. 称为抛物柱面.



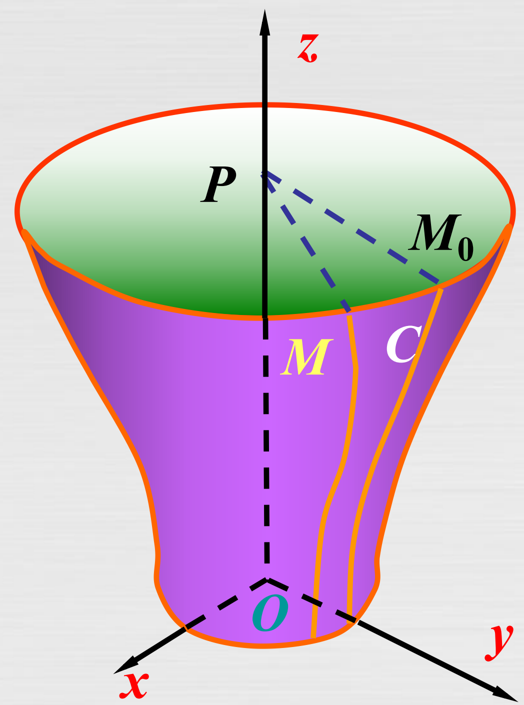
方程 $x^2+\frac{z^2}{4}=1$ 在空间表示以 xoz 坐标面上的椭圆为准线,平行于 y 轴的直线为母线的柱面, 称为椭圆柱面.



二、旋转曲面

一条平面曲线 C 绕其平面上一条直线 L 旋转所形成的曲面,称为旋转曲面, 定直线 L 称为旋转轴.

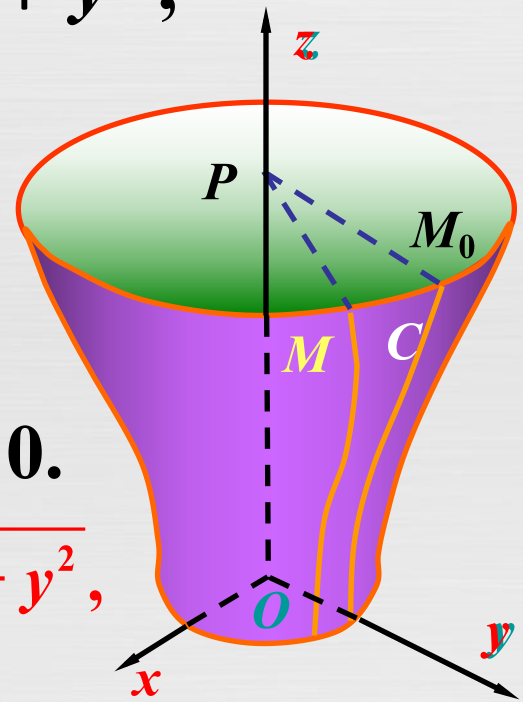
建立 yoz 面上曲线 $C:f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所构成的旋转曲面 的方程. 设 $M(x,y,z)$ 为旋转曲面上任意一点, 过点 M 作平面垂直于 z 轴, 交 z 轴于点 $P(0,0,z)$, 交曲线 C 于点 $M_0(0,y_0,z_0)$. 由于点 M 可以由点 M_0 绕 z 轴旋转得到, 因此有 $|PM|=|PM_0|,\ z=z_0.$



$C: f(y, z) = 0$

$|PM| = |PM_0|$, $z = z_0$, 因为 $|PM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ①

$|PM_0| = |y_0|$, 所以 $y_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, ②



又因为 M_0 在曲线 C 上，所以

$$f(y_0, z_0) = 0$$

将 ①、② 代入 $f(y_0, z_0) = 0$,

即得旋转曲面方程: $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$

在曲线C的方程f（y，z）=0中将y改成$\pm\sqrt{x^2 + y^2}$,

便得曲线C绕z轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转成的曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

例3. 求 xoy面上的直线 $z=ky$绕 z轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程.

解： 因为旋转轴为z轴,所以只要将方程 $z=ky$中的y改成

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

便得到旋转曲面——圆锥面的方程

$$z=\pm k\sqrt{x^2+y^2},$$

或 $$z^2=k^2(x^2+y^2)$$

例4. 将下列平面曲线绕指定坐标轴旋转，试求所得旋转曲面方程:

(1) yoz 坐标面上的直线 $z = ay\ (a \neq 0)$，绕 z 轴.

(2) yoz 坐标面上的抛物线 $z = ay^2\ (a > 0)$，绕 z 轴.

(3) xoy 坐标面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = 1$，分别绕 x、y 轴.

(1) yoz 坐标面上的直线 $z=ay(\ a\neq 0\ )$, 绕 z 轴.

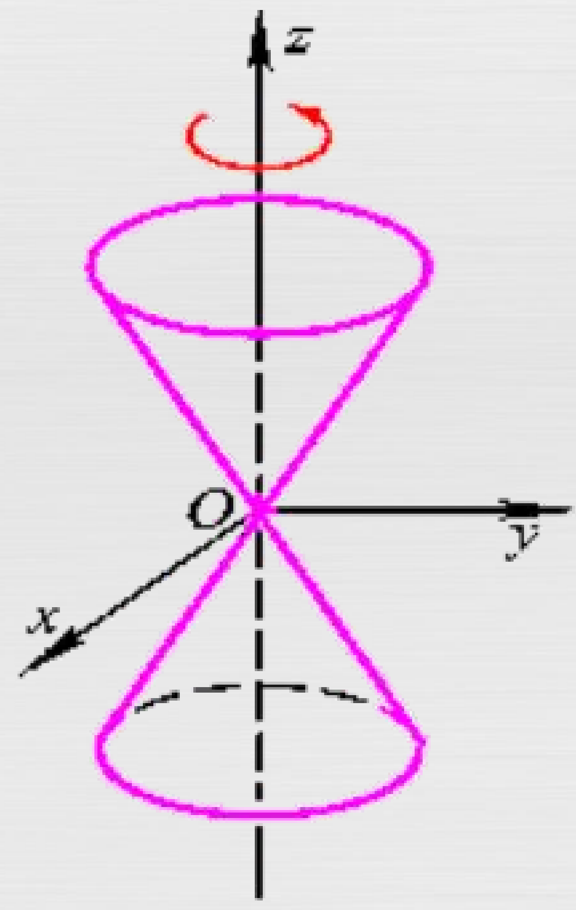
解：(1) $y\,oz$ 坐标面上的直线

$z=ay(\ a\neq 0\ )$绕 z 轴旋转，

故 z 保持不变，将 y 换成

$\pm\sqrt{x^2+y^2}$， 则得

$$z=a(\pm\sqrt{x^2+y^2}).$$



即所求旋转曲面方程为

$$z^2=a^2(x^2+y^2),$$

表示的曲面称为圆锥面，点 O 称为圆锥的顶点.

(2) yoz 坐标面上的抛物线 $z = ay^2$ 绕 z 轴旋转所得的曲面方程为

$$z = a(x^2 + y^2),$$

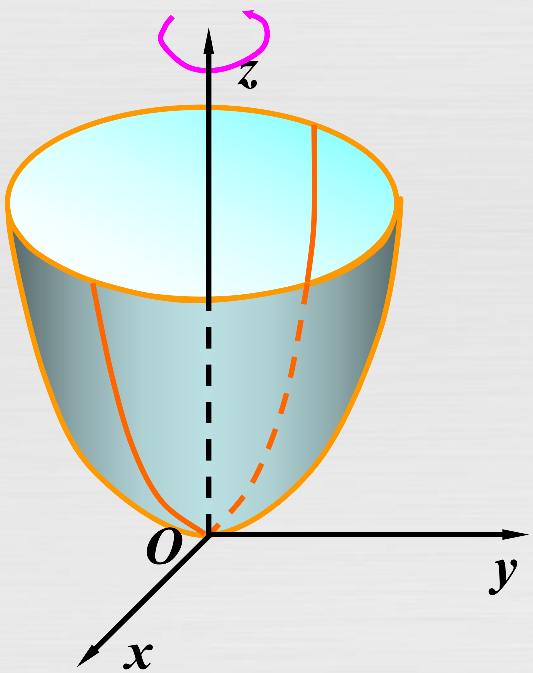
该曲面称为旋转抛物面.

其特征是: 当 $a < 0$ 时，旋转抛物面的开口向下.

一般地，方程

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面.



(3) xoy 坐标面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转，

故 x 保持不变，而将 y 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$，得旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

该曲面称为旋转椭球面.

类似地，该椭圆绕 y 轴旋转而得的旋转椭球面的方程为

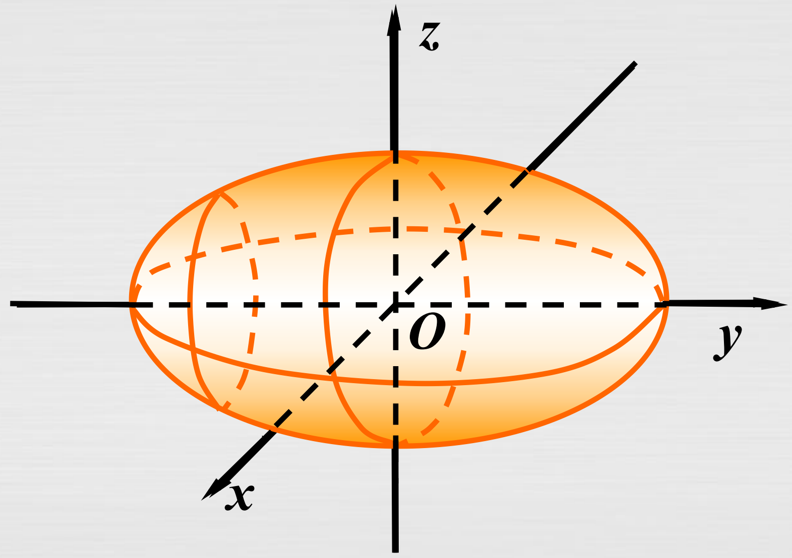
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

一般地，方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面称为**椭球面**.

当 $a=b=c$ 时，即为球面.



三、二次曲面举例

三元二次方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面.

称为二次曲面.

平面被称为一次曲面.

截痕法:

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截,

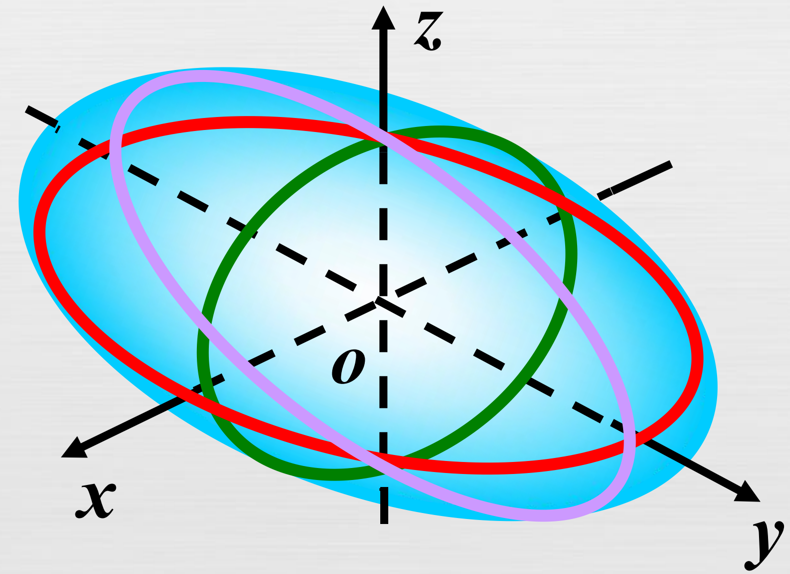
其交线(即截痕).

用截痕讨论几种特殊的二次曲面.

1. 椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

所表示的曲面



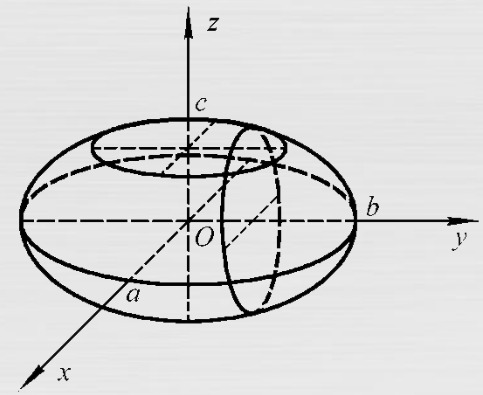
(1) 椭球面与三个坐标面的交线：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_1^2}{c^2}=\frac{c^2-z_1^2}{c^2}$$

(2) 椭球面与平面 $z=z_1$ 的交线为**椭圆**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1 \\ z=z_1 \qquad\qquad |z_1|<c \end{cases}$$



同理与平面 $x=x_1$ 和 $y=y_1$ 的交线也是椭圆.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(3) 椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b,$ $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 旋转椭球面

(2) $a=b=c,$ $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$ 球面

方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2.$

2. 双曲面

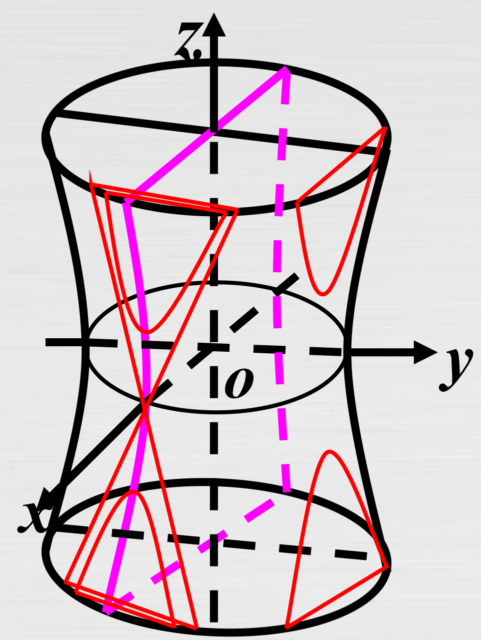
(1) 单叶双曲面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面

单叶双曲面与三个坐标面的交线:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

椭圆,



$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

双曲线

用平行于坐标面xoy的平面$z=z_1$ 截此曲面，

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^2}{c^2} \\ z=z_1 \end{cases}$$ 是中心在z轴上的椭圆，

用平行于坐标面zox的平面$y=y_1$ 截此曲面，

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2} \\ y=y_1 \end{cases}$$ 是中心在y轴上的双曲线

当 $y_1^2<b^2$ 时，双曲线的实轴平行于x轴，虚轴平行于z轴

当 $y_1^2>b^2$ 时，双曲线的实轴平行于z轴，虚轴平行于x轴

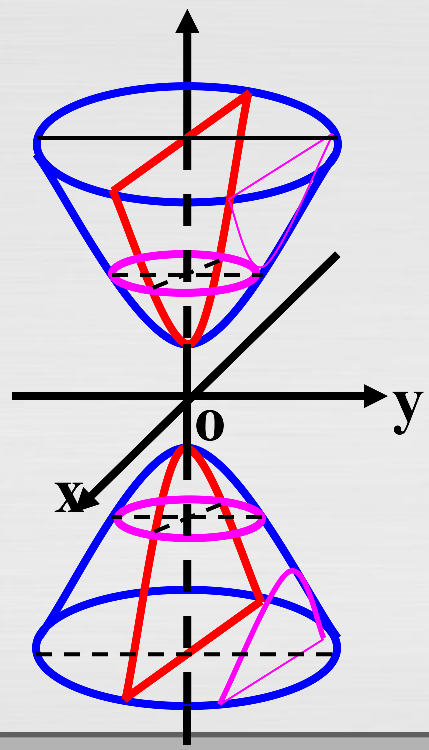
当 $y_1^2=b^2$ 时，所得的截痕为两条相交的直线.

类似地，用平行于yoz面的平面$x=x_1$ 截此曲面，
截痕也是双曲线.

(2) 双叶双曲面

方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 所表示的曲面

同样可用截痕法讨论，得曲面形状.

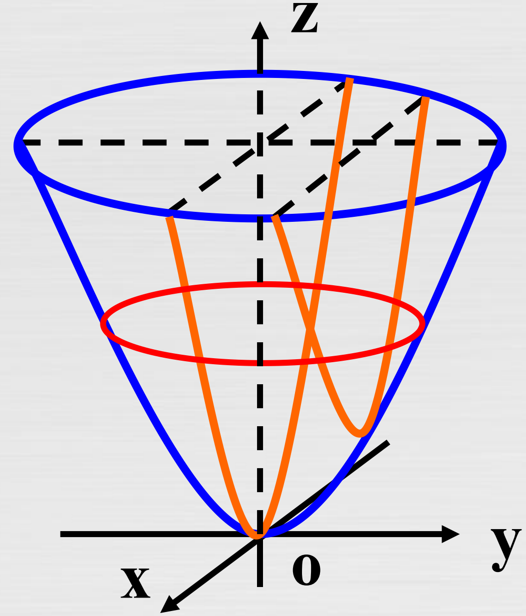


3. 抛物面

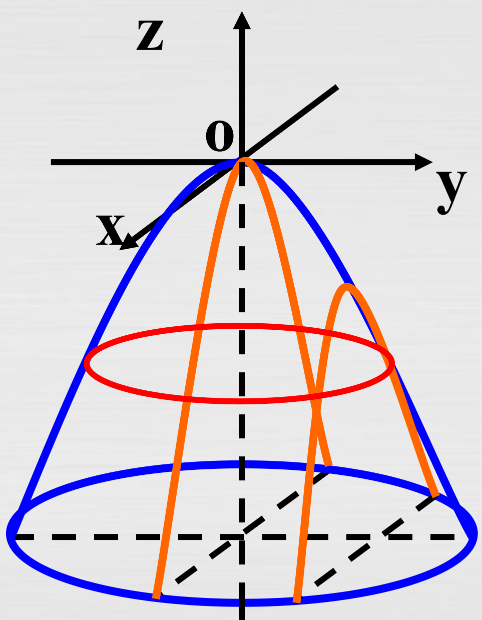
(1) 椭圆抛物面

方程 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$ 与 q 同号）所表示的曲面

$p>0,\quad q>0$



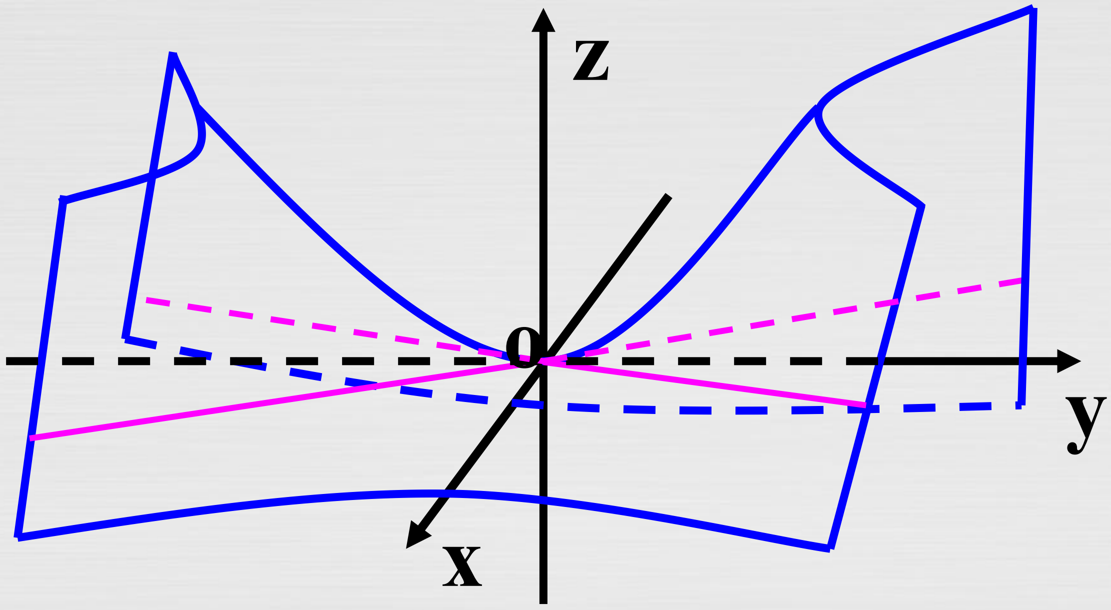
$p<0,\quad q<0$



(2) 双曲抛物面（马鞍面）

方程 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$ 与 q 同号）

所表示的曲面

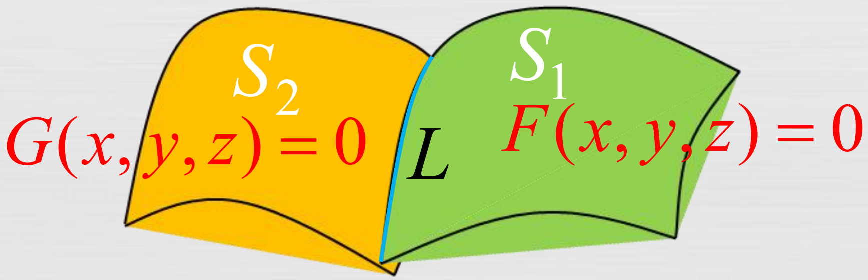


四、空间曲线

1.空间曲线的一般方程

空间曲线可视为**两曲面**的**交线**, 其一般方程为方程组

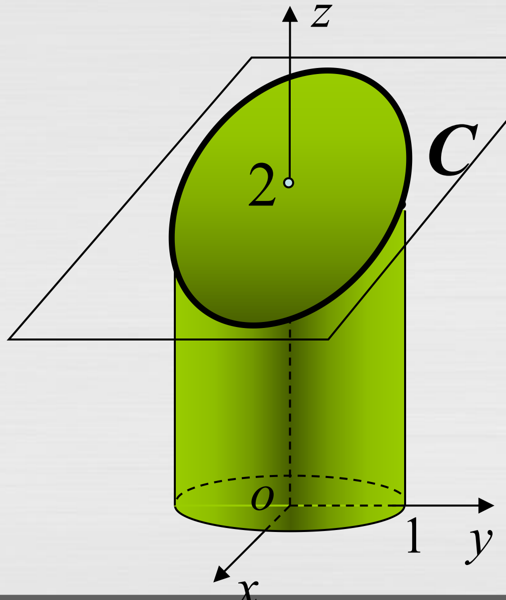
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

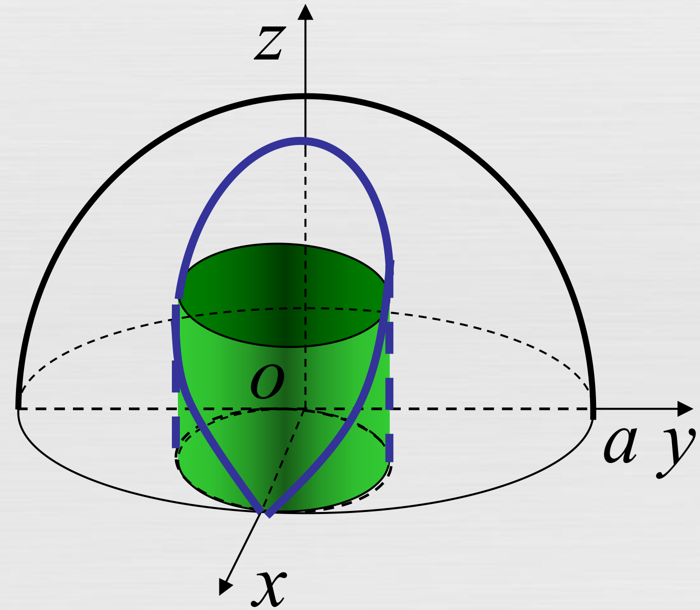
表示圆柱面与平面的交线 C.



又如, 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线 C.



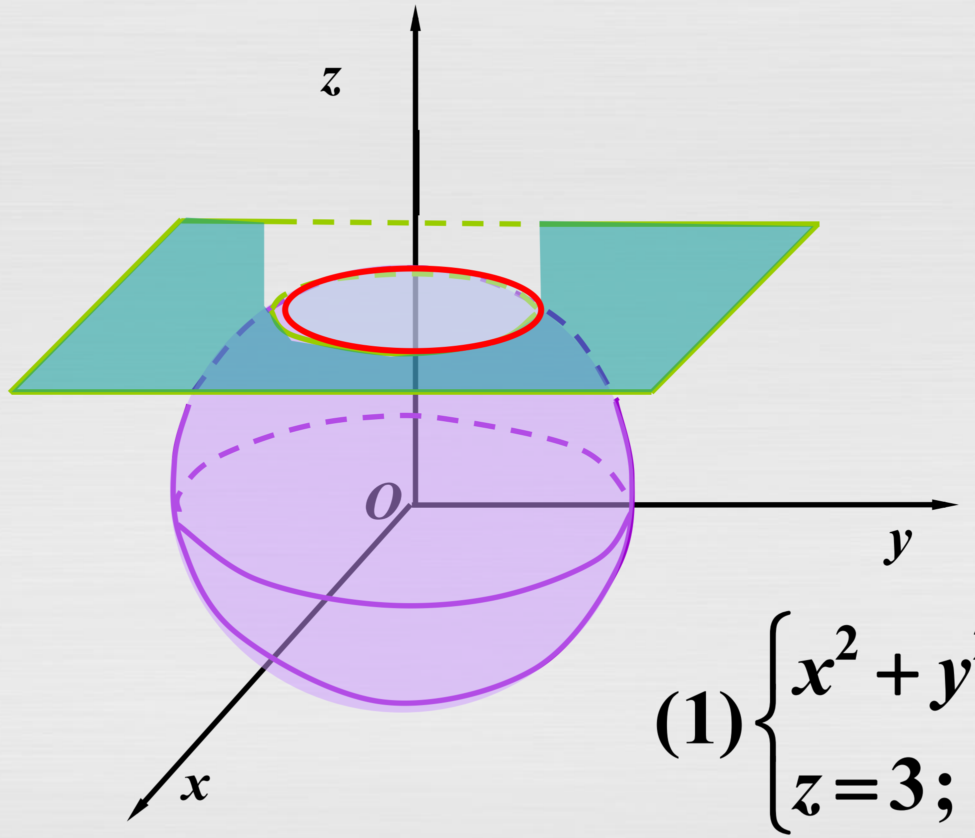
例 5. 下列方程组表示什么曲线?

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 0. \end{cases}$

解: (1) 因为 $x^2+y^2+z^2=25$ 是球心在原点，

半径为 5 的球面, $z=3$ 是平行于 xoy 坐标面的面，

因而它们的交线是在平面 $z=3$ 上的圆.



$$(1)\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3; \end{cases}$$

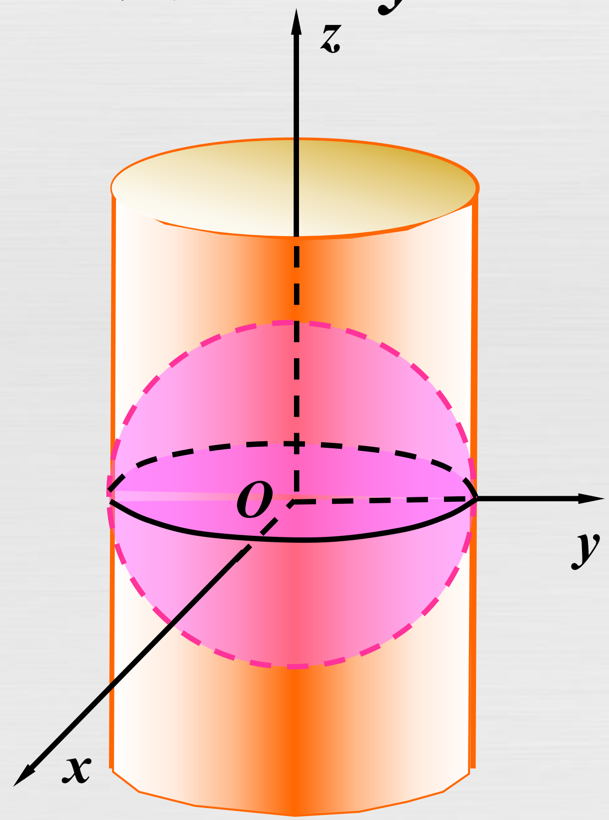
解： (2) 因为 $x^2+y^2+z^2=25$ 是球心在原点，半径为 5 的球面， $z=0$ 是 xoy 坐标面，

因而它们的交线是在 xoy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=25$.

若把(2)写成同解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0, \end{cases}$$

它表示母线平行于 z 轴的圆柱面与 xoy 坐标面的交线.这样更清楚地看出它是 xoy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=25$.



$$(2)\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=0. \end{cases}$$

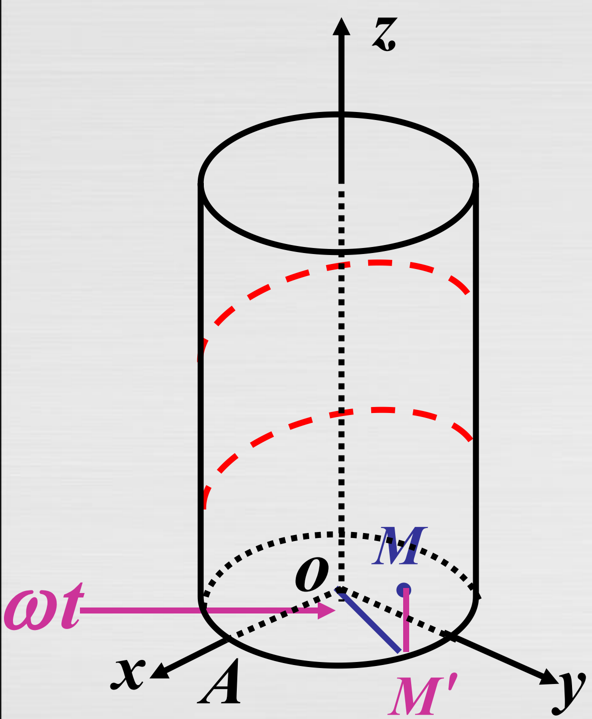
2. 空间曲线的参数方程

空间曲线 Γ 上动点 M 的坐标 x，y，z 也可以用另一个变量 t 的函数来表示，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

形如上的方程组称为曲线 Γ 的参数方程， t 为参数.

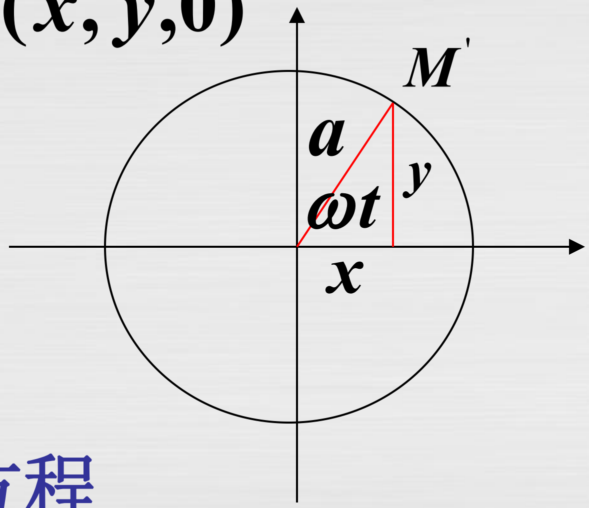
例6. 如果空间一点M在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升（其中ω、v都是常数），则动点M的轨迹叫做螺旋线. 试求螺旋线的参数方程.



解：取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到M点

M在xoy面的投影$M'(x,y,0)$

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$



即为 螺旋线的参数方程

如果令 $\theta=\omega t$, 以θ为参数,则螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

其中 $$b = \frac{v}{\omega}$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线Γ的方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

求它在xoy坐标面上的投影曲线方程.

以 Γ 为准线，平行于 z 轴的直线为母线的柱面，

称为空间曲线 Γ 关于 xoy 坐标面的**投影柱面.**

而投影柱面与 xoy 坐标面的交线 C 称为曲线 Γ

在 xoy 坐标面的**投影曲线.**

类似地，可以定义曲线 Γ 关于 yoz 坐标面、

zox坐标面的**投影柱面**及**投影曲线.**

设空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去变量z后得：$F(x,y)=0$

表示母线平行于z轴，曲线关于xoy的投影柱面

空间曲线在xoy面上的投影曲线为 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影曲线，

yoz面上的投影曲线，$\begin{cases} G(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

xoz面上的投影曲线，$\begin{cases} H(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例7. 已知两球面的方程为$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

求它们的交线在xoy面上的投影方程.

解: 两球面的交线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & (1) \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 & (2) \end{cases}$

先消去z

(1)-(2) 得，$y+z=1$

再以 $z=1-y$ 代入方程(1)，即得所求的柱面方程为

$$x^2+2y^2-2y=0$$

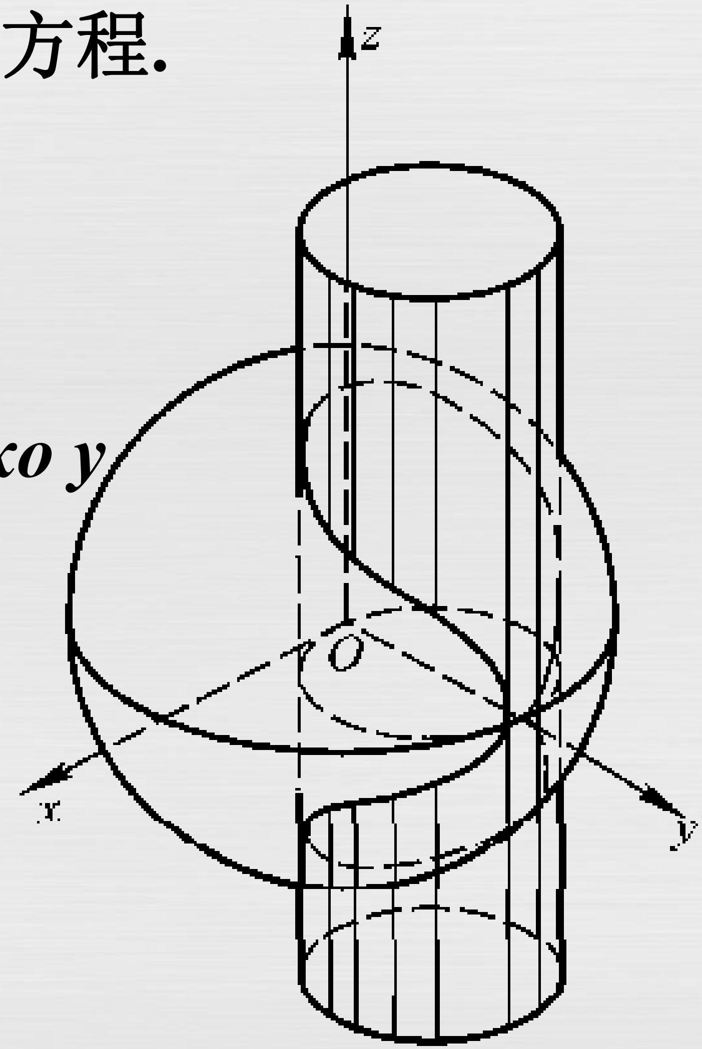
两球面的交线在xoy面上的投影方程是

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

例 8. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=64,\\x^2+y^2=8y\end{cases}$ 在 xoy, yoz 坐标面上的投影曲线的方程.

解: $x^2+y^2=8y$

就是 Γ 关于 xoy 坐标面的投影柱面方程, 因而曲线 Γ 在 xoy 坐标面上的投影曲线是圆.



$$\begin{cases}x^2+y^2=8y,\\z=0.\end{cases}$$

从曲线 Γ 的方程中消去 x，得到曲线 Γ 关于 yoz 坐标面的投影柱面的方程

$$z^2 + 8y = 64.$$

所以 Γ 在 yoz 坐标面的投影曲线是一段抛物线

$$\begin{cases} z^2 + 8y = 64, \\ x = 0 \end{cases} \qquad (0 \le y \le 8).$$

小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x,y,z)=0$

- **球面:** 如, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- **柱面:** 如,曲面 $F(x,y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.
- **旋转曲面:** 如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程, **截痕法.**

- **椭球面:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- **双曲面:** 单叶双曲面 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

• **抛物面:** 椭圆抛物面 双曲抛物面

(p, q 同号)

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$

3. 空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影.

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

备用题

1. 直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，

求旋转曲面的方程.

解: 设直线上一点 $M_1(1,y_1,z_1)$ 有 $y_1=z_1$,

旋转后 $M_1(1,y_1,z_1)$ 到达 $M(x,y,z)$ 位置

由于高度不变，有 $z=z_1$,

又 M 和 M_1 到 z 轴的距离 r 不因旋转而改变,

故 $r^2 = 1 + y_1^2 = x^2 + y^2$,

由于 $z = z_1 = y_1$,

故所求旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面 $x+y+z=1$ 的交线在 xoy 平面的投影曲线方程.

解: 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$，它与所给平面的

交线为 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

此曲线向 xoy 面的投影柱面方程为

$$x+y+x^2+y^2=1$$

此曲线在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x+y+x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

提高题

1. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

提高题解答

1. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解: 在xOy面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=2-x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ z=0 \end{cases}$$

在zOx面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2 \\ y=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

在yOz面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z=(\pm\sqrt{2-y^2-z}-1)^2+(y-1)^2 \\ x=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0 \\ x=0 \end{cases}$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解: 锥面与柱面交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=x^2+y^2\\ z=0\end{cases}, \text{即} \quad \begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$$

所以, 立体在 xOy 面上的投影为 $(x-1)^2+y^2\le 1$

锥面与柱面交线在 yOz 面上的投影为

$$\begin{cases}z=\sqrt{(\frac{1}{2}z^2)^2+y^2}\\ x=0\end{cases}, \text{即} \quad \begin{cases}(\frac{z^2}{2}-2)^2+y^2=1\\ x=0\end{cases}$$

所以, 立体在 yOz 面上的投影为 $(\frac{z^2}{2}-2)^2+y^2\le 1$

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面$z^2=2x$与平面$y=0$的交线为

$$\begin{cases} z=|x| \\ y=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} z=\sqrt{2x} \\ y=0 \end{cases}$$

所以, 立体在zOx面上的投影为 $\begin{cases} x\le z\le\sqrt{2x} \\ y=0 \end{cases}$