一、重要知识点

1、平面及其方程

已知平面Π 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且有法向量$n=(A,B, C)$.

(1)平面基本方程

一般式 $Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (abc\neq 0)$

(2)平面与平面之间的关系

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

2、空间直线及方程

已知直线L过定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,且有方向向量 $s=(m, n, p)$

(1)空间直线基本方程

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ $(m^2+n^2+p^2\neq 0)$

(2) 线与线的关系

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

3、 面与线间的关系

$$L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L // \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

4、点$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面Π： $Ax+By+Cz+D=0$, 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1. 求过点（4,1，-2)且与平面$3x-2y+6z=11$平行的平面方程.

解：所求平面与平面$3x-2y+6z=11$平行

故$n=\{3,-2,6\}$,

又过点(4,1,-2)

故所求平面方程为：$3(x-4)-2(y-1)+6(z+2)=0$

即$3x-2y+6z+2=0$.

2. 求过点$M_0(1,7,-3)$，且与连接坐标原点到点M_0的线段OM_0垂直的平面方程.

解：所求平面的法向量可取为

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{OM_0} = \{1, 7, -3\}$$

故平面方程为：$x-1+7(y-7)-3(z+3)=0$

即 $x+7y-3z-59=0$

3. 设平面过点(1,2,-1)，而在x轴和z轴上的截距都等于在y轴上的截距的两倍，求此平面方程.

解：设平面在y轴上的截距为b

则平面方程可定为

$$\frac{x}{2b}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2b}=1$$

又(1,2,-1)在平面上，则有

$$\frac{1}{2b}+\frac{2}{b}+\frac{-1}{2b}=1$$ 解得$b=2$.

故所求平面方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$$

4. 求过(1,1,-1),(-2,-2,2)和(1,-1,2)三点的平面方程.

解：由平面的三点式方程知

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

代入三已知点，有

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$$

化简得 $x-3y-2z=0$ 即为所求平面方程.

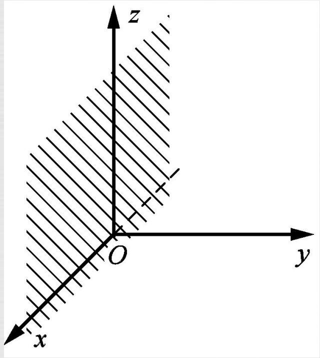
5. 指出下列各平面的特殊位置，并画出其图形：

(1) $y=0$ (2) $3x-1=0$ (3) $2x-3y-6=0$

(4) $x-y=0$ (5) $2x-3y+4z=0$

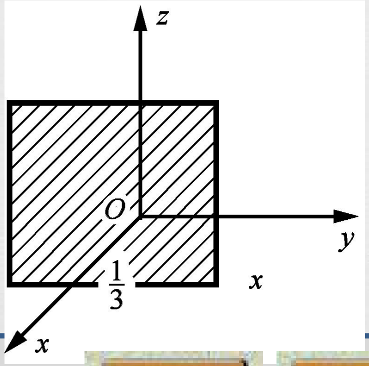
解(1): $y=0$表示xOz坐标面.

如图:



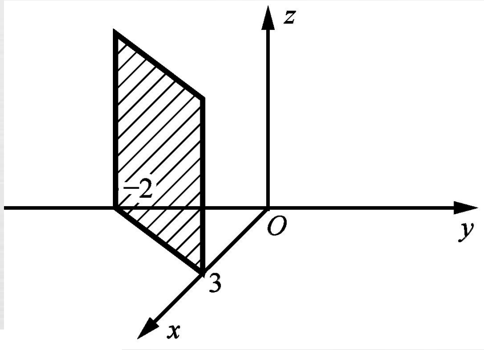
解(2): $3x-1=0$表示垂直于x轴的平面.

如图:



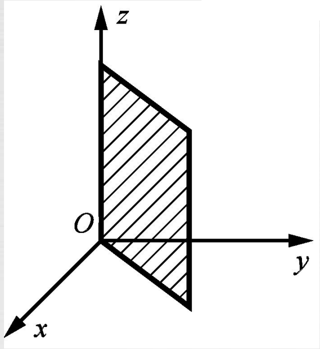
解(3): $2x-3y-6=0$表示平行于z轴且在x轴及y轴上的截距分别为$x=3$和$y=-2$的平面.

如图:



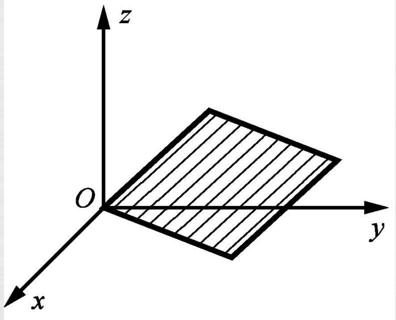
解(4): $x-y=0$表示过z轴的平面

如图:



解(5): $2x-3y+4z=0$表示过原点的平面

如图:



6. 通过两点(1,1,1)和(2,2,2)作垂直于平面$x+y-z=0$的平面.

解: 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

则其法向量为 $n=\{A,B,C\}$

已知平面法向量为 $n_1=\{1,1,-1\}$

过已知两点的向量$l=\{1,1,1\}$

由题知$n\cdot n_1=0$, $n\cdot l=0$

即 $$\begin{cases} A+B-C=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow C=0,\ \ A=-B.$$

所求平面方程变为$Ax-Ay+D=0$

又点（1，1，1）在平面上，所以有$D=0$

故平面方程为 $x-y=0.$

7. 求通过下列两已知点的直线方程：

$(1)(1,-2,1),(3,1,-1)$　　$(2)(3,-1,0),(1,0,-3)$

解(1)： 两点所确定的一个向量为

$$s=\{3-1,\ 1+2,\ -1-1\}=\{2,\ 3,\ -2\}$$

故直线的标准方程为：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2} \text{ 或 } \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-2}$$

解(2)： 两点所确定的一个向量为

$$s=\{1-3,\ 0+1,\ -3-0\}=\{-2,\ 1,\ -3\}$$

故直线的标准方程为：

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-3} \text{ 或 } \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$$

8. 求直线$\begin{cases} 2x+3x-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$的标准式方程和参数式方程.

解：所给直线的方向向量为

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}i+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}k$$

$$=i-7j-19k$$

另取x_0=0代入直线一般方程可解得y_0=7,z_0=17

于是直线过点(0，7，17),因此直线的标准方程为:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-7}{-7}=\frac{z-17}{-19}$$

且直线的参数方程为：$\begin{cases} x=t \\ y=7-7t \\ z=17-19t \end{cases}$

9. 决定参数k的值，使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件：

(1) 经过点(5,-4,6);

(2) 与平面$2x-3y+z=0$成 $\frac{\pi}{4}$ 的角.

解(1)：因平面过点（5，-4，6）

故有　$5-4k-2\times 6=9$

得$k=-4$.

解(2)：两平面的法向量分别为

$\boldsymbol{n}_1=\{1,k,-2\}$　　　$\boldsymbol{n}_2=\{2,-3,1\}$

且 $$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|-3k|}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$

10. 确定下列方程中的l和m:

(1) 平面 $2x+ly+3z-5=0$ 和平面 $mx-6y-z+2=0$ 平行;

(2) 平面 $3x-5y+lz-3=0$ 和平面 $x+3y+2z+5=0$ 垂直.

解(1): $\boldsymbol{n}_1=\{2,l,3\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{m,-6,-1\}$

$\because \boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2$ $\therefore \dfrac{2}{m}=\dfrac{l}{-6}=\dfrac{3}{-1}$

解得 $m=-\dfrac{2}{3}, l=18$

解(2): $\boldsymbol{n}_1=\{3,-5,l\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{1,3,2\}$

$\because \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$

$\therefore 3\times1-5\times3+l\times2=0$

解得 $l=6$

11. 通过点(1,-1,1)作垂直于两平面$x-y+z-1=0$和$2x+y+z+1=0$的平面.

解：设所求平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$

其法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$

$\boldsymbol{n}_1=\{1,-1,1\}$， $\boldsymbol{n}_2=\{2,1,1\}$

$$\because \begin{cases} \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1 \Rightarrow A-B+C=0 \\ \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_2 \Rightarrow 2A+B+C=0 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} A=-\dfrac{2}{3}C \\ B=\dfrac{C}{3} \end{cases}$

又(1,-1,1)在所求平面上,故$A-B+C+D=0$，得$D=0$

故所求平面方程为 $-\dfrac{2}{3}Cx+\dfrac{C}{3}y+Cz=0$

即 $2x-y-3z=0$

12. 求平行于平面$3x-y+7z=5$,且垂直于向量$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的单位向量

解：$\boldsymbol{n}_1=\{3,-1,7\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{1,-1,2\}$. $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_2$

故 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

$$|n|=\sqrt{5^2+1+2^2}=\sqrt{30}$$

则 $\boldsymbol{e}_n=\pm\frac{1}{\sqrt{30}}(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}).$

13. 求下列直线的夹角：

(1) $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0 \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$

(2) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$ 和 $\begin{cases} \dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2} \\ x=1 \end{cases}$

解(1)：两直线的方向向量分别为：

$$s_1=\{5,-3,3\}\times\{3,-2,1\}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\{3,4,-1\}$$

$$s_2=\{2,2,-1\}\times\{3,8,1\}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=\{10,-5,10\}$$

由 $s_1\cdot s_2=3\times10+4\times(-5)+(-1)\times10=0$ 知 $s_1\perp s_2$

从而两直线垂直，夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$

解(2): 直线 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$ 的方向向量为 $s_1=\{4,-12,3\}$,

直线 $\begin{cases}\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2}\\ x=1\end{cases}$ 的方程可变为 $\begin{cases}2y-z+2=0\\ x-1=0\end{cases}$

可求得其方向向量

$$s_2=\{0,2,-1\}\times\{1,0,0\}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,-1,-2\},$$

于是 $\cos\theta=\dfrac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1|\cdot|s_2|}=\dfrac{6}{13\sqrt{5}}\approx 0.2064$

$\theta\approx 78°5'$

14. 求下列直线与平面的交点：

$$(1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6},\ 2x+3y+z-1=0$$

$$(2)\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2},\ x+2y-2z+6=0$$

解(1): 直线参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=6t \end{cases}$

代入平面方程得t=1

故交点为（2，-3，6）.

$$(2)\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2},\ x+2y-2z+6=0$$

解(2): 直线参数方程为 $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=0$

故交点为（-2，1，3）.

15. 求点(1,2,1)到平面$x+2y+2z-10=0$的距离.

解： 过点（1，2，1）作垂直于已知平面的直线，直线的方向向量为$s=n=\{1，2，2\}$

所以垂线的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+2t \end{cases}$

将其代入平面方程得 $t=\dfrac{1}{3}$

故垂足为 $(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{5}{3})$ 且与点（1，2，1）的距离为

$$d=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}=1$$

由点到平面的距离公式得.

$$d=\frac{|1\times1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$$