

1. 二重积分的几何意义

当二元函数 $f(x, y) \geq 0$ 时, 二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 表示的就是以平面区域 (σ) 为底、空间曲面 $(S) = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in (\sigma)\}$ 为顶的柱体的体积.

1. 若二元函数 $f(x, y) = 1$, 求二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$.

解 已知 $f(x, y) = 1$, 由二重积分的几何意义可知, $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 表示一个柱体的体积, 该柱体的高度为 1, 其底为平面区域 (σ) .

若记平面区域 (σ) 的面积为 S_σ , 得

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} d\sigma = S_\sigma.$$

2. 在二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 的定义中, 所有子区域 $(\Delta\sigma_k) (k=1, 2, \dots, n)$ 的直径的最大值 $d \rightarrow 0$, 能否替换为所有子区域 $(\Delta\sigma_k)$ 的面积的最大值趋于零, 为什么?

2. 在二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 的定义中, 所有子区域 $(\Delta\sigma_k) (k=1, 2, \dots, n)$ 的直径的最大值 $d \rightarrow 0$, 能否替换为所有子区域 $(\Delta\sigma_k)$ 的面积的最大值趋于零, 为什么?

解 不能.

因为所有子区域 $(\Delta\sigma_k)$ 的面积 $\Delta\sigma_k$ 的最大值趋于零并不能保证所有 $(\Delta\sigma_k) (k=1, 2, \dots, n)$ 的直径的最大值 $d \rightarrow 0$, 所以在定义中不能替换.

例如, 考虑在矩形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的二重积分, 可以用直线 $x = \frac{k}{n} (k=1, 2, \dots, n-1)$ 对

矩形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 进行剖分, 使得这 n 个小区域的面积最大值满足: $\Delta\sigma = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$

时), 但这些小区域的直径的最大值恒为 $d \equiv 1$. 由此可见在二重积分的定义中不能简单用 $(\Delta\sigma_k)$ 的度量的最大值趋于零来刻画区域分割的细化程度.

3. 应用二重积分性质比较下列二重积分的大小:

(1) $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$ 与 $\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(2) $\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_{(\sigma)} (x + y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

解 (1) 此题中两个二重积分有相同的积分区域, 即 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. 由二重积分的几何意义可知

$$\iint_{(\sigma)} 2xy \, d\sigma = 0,$$

而

$$\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 \, d\sigma = \iint_{(\sigma)} (x^2 + 2xy + y^2) \, d\sigma = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) \, d\sigma + \iint_{(\sigma)} 2xy \, d\sigma,$$

所以

$$\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 \, d\sigma = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) \, d\sigma,$$

即两个二重积分相等.

(2) 此题中两个二重积分有相同的积分区域, 由于积分区域 (σ) 为二维平面上第一象限内的三角形区域, 满足 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$, 易知在该区域上有 $(x + y)^2 \geq (x + y)^3$ 成立, 所以由二重积分的性质可得

$$\iint_{(\sigma)} (x + y)^2 \, d\sigma \geq \iint_{(\sigma)} (x + y)^3 \, d\sigma.$$

4. 比较二重积分 $\iint_{(\sigma_1)} xy d\sigma$ 和 $\iint_{(\sigma_2)} xy d\sigma$ 的大小, 其中积分区域 (σ_1) 是由 $x=0, y=0$ 以及 $x+y=3$ 围成的平面区域; 积分区域 (σ_2) 是由 $x=-1, y=0$ 以及 $x+y=3$ 围成的平面区域.

解 作图,积分区域如 A 组题 4 图所示.

可见,区域 $(\sigma_2) = (\sigma_1) + (\sigma)$,故而由二重积分的区域可加性可得

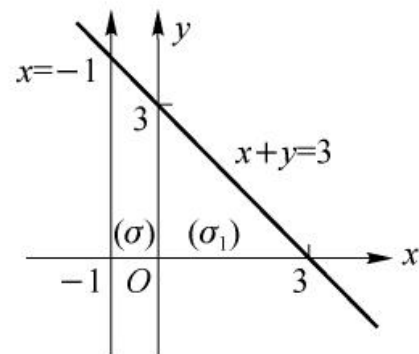
$$\iint_{(\sigma_2)} xy d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} xy d\sigma + \iint_{(\sigma)} xy d\sigma.$$

由于在 (σ) 区域内二元函数 $xy < 0$,利用二重积分的性质可得

$$\iint_{(\sigma)} xy d\sigma < \iint_{(\sigma)} 0 d\sigma = 0,$$

因此

$$\iint_{(\sigma_2)} xy d\sigma < \iint_{(\sigma_1)} xy d\sigma.$$



A 组题 4 图

5. 估算下列二重积分：

(1) $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2 + 1) d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

5. 估算下列二重积分:

(1) $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2 + 1) d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$;

解 (1) 由于积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 可知在此区域上被积函数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

满足 $1 \leq f(x, y) \leq 2$, 所以由二重积分的性质可得

$$\iint_{(\sigma)} 1 d\sigma \leq \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2 + 1) d\sigma \leq \iint_{(\sigma)} 2 d\sigma.$$

由于圆域 $(\sigma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的面积为 π , 从式(1)可得到如下估计:

$$\pi \leq \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2 + 1) d\sigma \leq 2\pi.$$

2. 直角坐标系下的二重积分计算

若积分区域(σ)可以由不等式

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

来刻画,即该区域为 x 型区域,则二重积分可以化为如下的累次积分:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

若积分区域(σ)可以由不等式

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

来刻画,即该区域为 y 型区域,则二重积分可以化为如下的累次积分:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

3. 极坐标下二重积分的计算

若积分区域(σ)在极坐标下可由不等式

$$\rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来刻画,则二重积分可以化为如下的累次积分:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

4. 二重积分的一般换元法

考虑如下正则变换

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y), \quad (x,y) \in (\sigma) \subseteq \mathbf{R}^2,$$

且有 $(u,v) \in (\sigma') \subseteq \mathbf{R}^2$ 成立. 其逆变换为

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad (u,v) \in (\sigma') \subseteq \mathbf{R}^2,$$

则有

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y) d\sigma = \iint_{(\sigma')} f[x(u,v), y(u,v)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| d\sigma',$$

其中 $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ 为变换的雅可比行列式.

(3) 积分区域 (σ) 关于 y 轴对称时,

① 若二元函数 f 关于 x 是奇函数, 则二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0$;

② 若二元函数 f 关于 x 是偶函数, 则二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma$, 其中 (σ_1) 是

区域 (σ) 落在右半平面 $x \geq 0$ 的部分.

运用二重积分的几何意义去判断:

由二重积分的几何意义可知, 当二元函数 $f(x, y) \geq 0$ 时, 二重积分 $V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 是以曲面 $(S): f(x, y)$ 为顶、平面区域 (σ) 为底的柱体的体积, 而当二元函数 $f(x, y) \leq 0$ 时, 二重积分 $V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 是以曲面 $(S): f(x, y)$ 为顶、平面区域 (σ) 为底的柱体的体积的相反数.

4. 考察二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$, 若积分区域 (σ) 关于 x 轴对称, 在什么条件下下列等式分别成立?

$$(1) \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0; \quad (2) \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma,$$

其中 (σ_1) 是区域 (σ) 落在上半平面 $y \geq 0$ 的部分.

解 (1) 若积分域关于 x 轴对称, 当被积函数 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数, 即 $f(x, y) = -f(x, -y)$ 时,

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 0$$

(2) 若积分域关于 x 轴对称, 当被积函数 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数, 即 $f(x, y) = f(x, -y)$ 时,

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) d\sigma$$

7. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_{(\sigma)} \sin(x+y) d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$;

(2) $\iint_{(\sigma)} xy e^x d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;

(3) $\iint_{(\sigma)} xy \max\{x, y\} d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(4) $\iint_{(\sigma)} \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$;

(5) $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma$, 其中积分区域 (σ) 是 $x=1, y=0$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所围区域;

(6) $\iint_{(\sigma)} x e^y d\sigma$, 其中积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$;

(7) $\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} d\sigma$, 其中积分区域 (σ) 是 $y=x^2+1, y=1$ 及 $x=1$ 所围区域;

(8) $\iint_{(\sigma)} (x+y)^2 d\sigma$, 其中积分区域 (σ) 是 $|x|+|y|=1$ 所围区域;

解 (1) 积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$, 故而

$$\begin{aligned}\iint_{(\sigma)} \sin(x+y) d\sigma &= \int_1^2 dy \int_0^2 \sin(x+y) dx = \int_1^2 [\cos y - \cos(2+y)] dy \\&= [\sin y - \sin(2+y)] \Big|_1^2 \\&= \sin 2 - \sin 1 - (\sin 4 - \sin 3) \\&= \sin 2 + \sin 3 - \sin 1 - \sin 4.\end{aligned}$$

(2) 积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$, 故而

$$\iint_{(\sigma)} xy e^x d\sigma = \int_0^1 x e^x dx \int_0^2 y dy = \int_0^1 x e^x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = 2(x-1)e^x \Big|_0^1 = 2.$$

(3) 积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 故而

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} xy \max(x, y) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy + \int_0^1 dx \int_x^1 x y^2 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{15} x^5 + \frac{1}{10} x^5 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(4) 积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$, 故而

$$\iint_{(\sigma)} \arctan \frac{y}{x} d\sigma = \int_1^2 dx \int_{-1}^1 \arctan \frac{y}{x} dy = \int_1^2 \left[y \arctan \frac{y}{x} - x \ln \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \right] \Big|_{-1}^1 dx = \int_1^2 0 dx = 0.$$

(5) 由积分区域 (σ) 是 $x=1, y=0$ 及 $y=\sqrt{x}$ 所围区域, 可得

$$(\sigma) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

故而,

$$\iint_{(\sigma)} xy \, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} xy \, dy = \int_0^1 x \left[\left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{x}} \right] dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(6) 积分区域 $(\sigma) = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, 故而

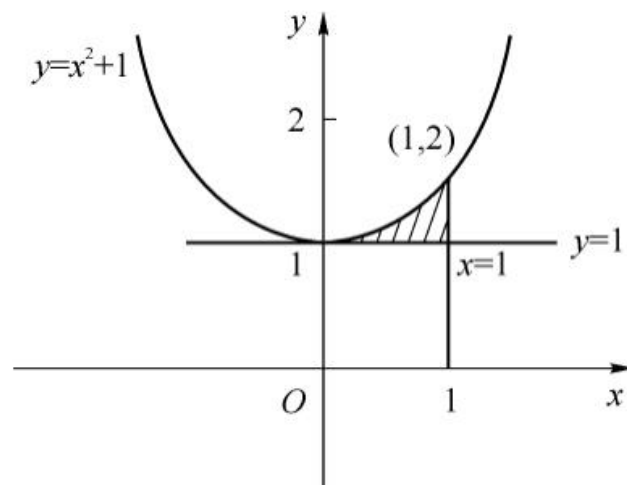
$$\iint_{(\sigma)} x e^y \, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x x e^y \, dy = \int_0^1 x e^y \int_0^x dx = \int_0^1 x (e^x - 1) dx = \left(x e^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

该积分也可以这样计算:

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} x e^y \, d\sigma &= \int_0^1 dy \int_y^1 x e^y \, dx = \int_0^1 e^y \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{e^y}{2} - \frac{y^2}{2} e^y \right] \Big|_0^1 + \int_0^1 y e^y \, dy = -\frac{1}{2} + (y e^y - e^y) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(7) 积分区域(σ)是 $y=x^2+1$, $y=1$ 及 $x=1$ 所围区域, 如 A 组题图 7(7)所示, 故而

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} d\sigma = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \int_1^{x^2+1} dy = \int_0^1 x \sin x dx = [x(-\cos x) + \sin x] \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1.$$



(8) 由 $(\sigma) = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 令

$$(\sigma_1) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 1-x\}, \quad (\sigma_2) = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, -1-x \leq y \leq 1+x\},$$

可得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} (x+y)^2 d\sigma &= \iint_{(\sigma_1)} (x+y)^2 d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} (x+y)^2 d\sigma \\ &= \int_0^1 \left[\int_{x-1}^{1-x} (x+y)^2 dy \right] dx + \int_{-1}^0 \left[\int_{-x-1}^{1+x} (x+y)^2 dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x+y)^3 \Big|_{1+x}^{1-x} \right] dx + \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{3} (x+y)^3 \Big|_{1-x}^{1+x} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (2x-1)^3] dx + \frac{1}{3} \int_{-1}^0 [1 + (2x+1)^3] dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x - \frac{1}{8} (2x-1)^4 \right] \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \left[x + \frac{1}{8} (2x+1)^4 \right] \Big|_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

