第 5 章　概率与概率分布

PowerPoint

第 5 章 概率与概率分布

5.1 随机事件及其概率

5.2 离散型随机变量及其分布

5.3 连续型随机变量的概率分布

学习目标

1. 了解随机事件及其概率
2. 解释随机变量及其分布
3. 计算随机变量的数学期望和方差
5. 计算离散型随机变量的概率和概率分布
6. 计算连续型随机变量的概率
7. 用Excel计算分布的概率

5.1 随机事件及其概率

5.1.1 随机事件的几个基本概念

5.1.2 事件的概率

5.1.3 关于概率计算的几个例子

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

随机事件的几个基本概念

试 验
(experiment)

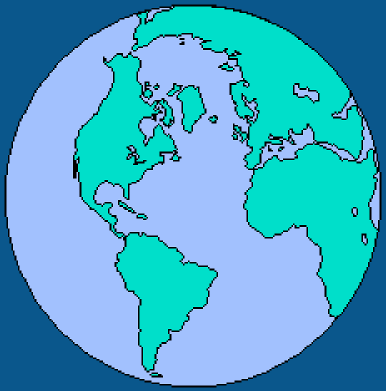
1. 在相同条件下，对事物或现象所进行的观察
   - 例如：掷一枚骰子，观察其出现的点数
2. 试验的特点
   - 可以在相同的条件下重复进行
   - 每次试验的可能结果可能不止一个，但试验的所有可能结果在试验之前是确切知道的
   - 在试验结束之前，不能确定该次试验的确切结果

事件的概念

1. 事件(event)：随机试验的每一个可能结果(任何样本点集合)
   - 例如：掷一枚骰子出现的点数为3
2. 随机事件(random event)：每次试验可能出现也可能不出现的事件
   - 例如：掷一枚骰子可能出现的点数
3. 必然事件(certain event)：每次试验一定出现的事件，用Ω表示
   - 例如：掷一枚骰子出现的点数小于7
4. 不可能事件(impossible event)：每次试验一定不出现的事件，用Φ表示
   - 例如：掷一枚骰子出现的点数大于6

事件与样本空间

1. 基本事件**(elementary event)**
   - 一个不可能再分的随机事件
   - 例如：掷一枚骰子出现的点数



2. 样本空间**(sample space)**
   - 一个试验中所有基本事件的集合，用Ω表示
   - 例如：在掷枚骰子的试验中，Ω={1,2,3,4,5,6}
   - 在投掷硬币的试验中，Ω={正面，反面}

事件的概率

事件的概率
(probability)

1. 事件A的概率是对事件A在试验中出现的可能性大小的一种度量
2. 表示事件A出现可能性大小的数值
3. 事件A的概率表示为$P(A)$
4. 概率的定义有：古典定义、统计定义和主观概率定义

概率的古典定义

- 如果某一随机试验的结果有限，而且各个结果在每次试验中出现的可能性相同，则事件A发生的概率为该事件所包含的基本事件个数 m 与样本空间中所包含的基本事件个数 n 的比值，记为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所包含的基本事件个数}}{\text{样本空间所包含的基本事件个数}}$$

$$=\frac{m}{n}$$

概率的统计定义

- 在相同条件下进行n次随机试验，事件A出现m次，则比值m/n称为事件A发生的频率。随着n的增大，该频率围绕某一常数P上下摆动，且波动的幅度逐渐减小，取向于稳定，这个频率的稳定值即为事件A的概率，记为

$$P(A)=\frac{m}{n}=p$$

概率的统计定义
(例题分析)

【例】：某工厂为节约用电，规定每天的用电量指标为1000度。按照上个月的用电记录，30天中有12天的用电量超过规定指标，若第二个月仍没有具体的节电措施，试问该厂第一天用电量超过指标的概率。

解：上个月30天的记录可以看作是重复进行了30次试验，试验*A*表示用电超过指标出现了12次。根据概率的统计定义有

$$P(A)=\frac{\text{超过用电指标天数}}{\text{试验的天数}}=\frac{12}{30}=0.4$$

主观概率定义

1. 对一些无法重复的试验，确定其结果的概率只能根据以往的经验人为确定
2. 概率是一个决策者对某事件是否发生，根据个人掌握的信息对该事件发生可能性的判断
3. 例如，我认为2003年的中国股市是一个盘整年

概率计算的例子
(例题分析)

【例】某电子公司所属企业的职工人数如下表。从该公司中随机抽取1人，问:

(1)该职工为男性的概率

(2)该职工为手机公司职工的概率

某电子公司所属企业职工人数			
工厂	男职工	女职工	合计
电脑公司	4400	1800	6200
手机公司	3200	1600	4800
半导体公司	900	600	1500
合计	8500	4000	12500

概率计算的例子
(例题分析)

解：(1)用A 表示“抽中的职工为男性”这一事件；A为全公司男职工的集合；基本空间为全公司职工的集合。则

$$P(A)=\frac{\text{全公司男性职工人数}}{\text{全公司职工总人数}}=\frac{8500}{12500}=0.68$$

(2) 用B 表示“抽中的职工为手机公司职工”；B为手机公司全体职工的集合；基本空间为全体职工的集合。则

$$P(B)=\frac{\text{手机公司职工人数}}{\text{全公司职工人数}}=\frac{4800}{12500}=0.384$$

5.2 离散型随机变量及其分布

5.2.1 随机变量的概念

5.2.2 离散型随机变量的概率分布

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

随机变量的概念

随机变量
(random variables)

1. 一次试验的结果的数值性描述
2. 一般用 X、Y、Z 来表示
3. 例如: 投掷两枚硬币出现正面的数量
4. 根据取值情况的不同分为离散型随机变量和连续型随机变量

离散型随机变量
(discrete random variables)

1. 随机变量 X 取有限个值或所有取值都可以逐个列举出来 $X_1, X_2, \ldots$
2. 以确定的概率取这些不同的值
3. 离散型随机变量的一些例子

试验	随机变量	可能的取值
抽查100个产品	取到次品的个数	0,1,2, …,100
一家餐馆营业一天	顾客数	0,1,2, …
电脑公司一个月的销售	销售量	0,1, 2,…
销售一辆汽车	顾客性别	男性为0,女性为1

连续型随机变量
(continuous random variables)

1. 随机变量 X 取无限个值
2. 所有可能取值不可以逐个列举出来，而是取数轴上某一区间内的任意点
3. 连续型随机变量的一些例子

试验	随机变量	可能的取值
抽查一批电子元件	使用寿命(小时)	$X \geq 0$
新建一座住宅楼	半年后工程完成的百分比	$0 \leq X \leq 100$
测量一个产品的长度	测量误差(cm)	$X \geq 0$

离散型随机变量的概率分布

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

离散型随机变量的概率分布

1. 列出离散型随机变量X的所有可能取值
2. 列出随机变量取这些值的概率
3. 通常用下面的表格来表示

$X = x_i$	x_1， x_2， … ， x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1， p_2， … ， p_n

4. $P(X = x_i) = p_i$称为离散型随机变量的概率函数
   - $p_i \geq 0$
   - $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

离散型随机变量的概率分布
(例题分析)

【例】如规定打靶中域Ⅰ得3分，中域Ⅱ得2分，中域Ⅲ得1分，中域外得0分。今某射手每100次射击，平均有30次中域Ⅰ，55次中域Ⅱ，10次中Ⅲ，5次中域外。则考察每次射击得分为0,1,2,3这一离散型随机变量，其概率分布为

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)=p_i$	0.05	0.10	0.55	0.30

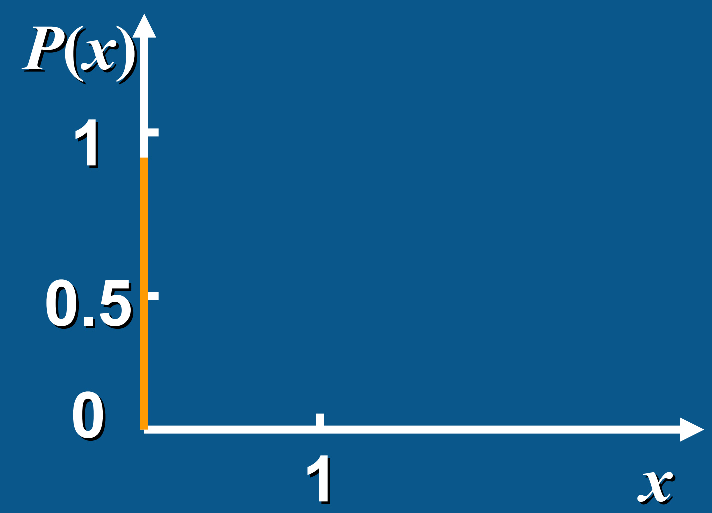
离散型随机变量的概率分布
(0—1分布)

1. 一个离散型随机变量X只取两个可能的值
   - 例如，男性用 1表示，女性用0表示；合格品用 1 表示，不合格品用0表示
2. 列出随机变量取这两个值的概率

离散型随机变量的概率分布
(0—1分布)

【例】已知一批产品的次品率为p＝0.05，合格率为q=1-p=1-0.05=0.95。并指定废品用1表示，合格品用0表示。则任取一件为废品或合格品这一离散型随机变量，其概率分布为

$X=x_i$	1	0
$P(X=x_i)=p_i$	0.05	0.95



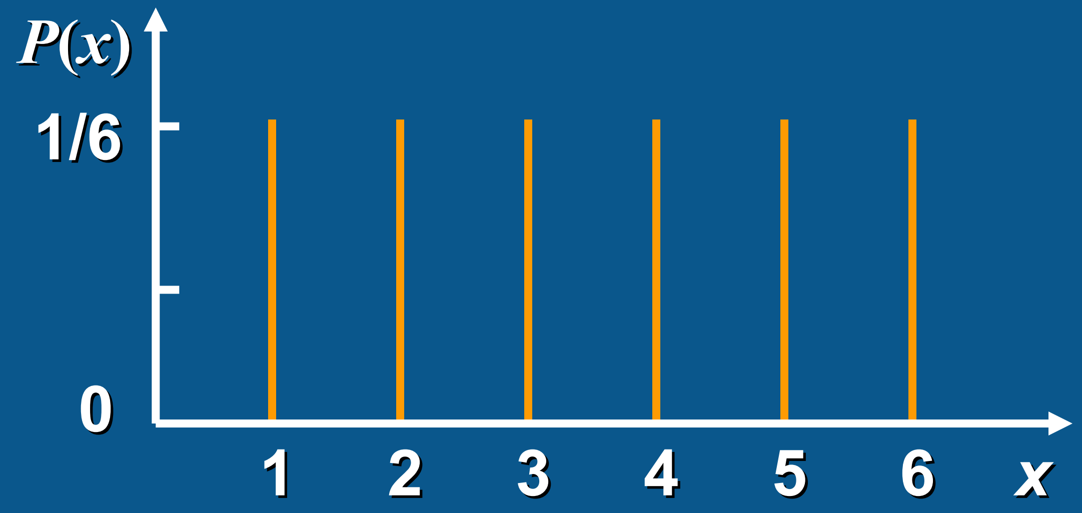
离散型随机变量的概率分布
(均匀分布)

1. 一个离散型随机变量取各个值的概率相同
2. 列出随机变量取值及其取值的概率
3. 例如，投掷一枚骰子，出现的点数及其出现各点的概率

离散型随机变量的概率分布
(均匀分布)

【例】投掷一枚骰子，出现的点数是个离散型随机变量，其概率分布为

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)=p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



离散型随机变量的期望值和方差

离散型随机变量的期望值
(expected value)

1. 在离散型随机变量X的一切可能取值的完备组中，各可能取值x_i与其取相对应的概率p_i乘积之和
2. 描述离散型随机变量取值的集中程度
3. 计算公式为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i \qquad (X\text{取有限个值})$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \qquad (X\text{取无穷个值})$$

离散型随机变量的方差 (variance)

1. 随机变量X的每一个取值与期望值的离差平方和的数学期望，记为$D(X)$
2. 描述离散型随机变量取值的分散程度
3. 计算公式为

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

若X是离散型随机变量，则

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[x_i-E(X)\right]^2\cdot p_i$$

离散型随机变量的方差
(例题分析)

【例】投掷一枚骰子，出现的点数是个离散型随机变量，其概率分布为如下。计算数学期望和方差

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)=p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

解：数学期望为：$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 1\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=3.5$

方差为：$D(X)=\sum_{i=1}^{6}[x_i-E(X)]^2\cdot p_i$

$$=(1-3.5)^2\times\frac{1}{6}+\cdots+(6-3.5)^2\times\frac{1}{6}=2.9167$$

几种常见的离散型概率分布

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

二项试验
(贝努里试验)

1. 二项分布与贝努里试验有关
2. 贝努里试验具有如下属性
   - 试验包含了n个相同的试验
   - 每次试验只有两个可能的结果，即“成功”和“失败”
   - 出现“成功”的概率 p 对每次试验结果是相同的；“失败”的概率 q 也相同，且 $p+q=1$
   - 试验是相互独立的
   - 试验“成功”或“失败”可以计数

二项分布
(Binomial distribution)

1. 进行 n 次重复试验，出现“成功”的次数的概率分布称为二项分布
2. 设X为 n 次重复试验中事件A出现的次数，X 取 x 的概率为

$$P\{X = x\} = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad (x = 0,1,2,\cdots,n)$$

式中：$C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

二项分布

1. 显然，对于$P\{X=x\}\geq 0$，$x=1,2,\ldots,n$，有

$$\sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

2. 同样有

$$P\{0\leq X\leq m\} = \sum_{x=0}^{m} C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$P\{m\leq X\leq n\} = \sum_{x=m}^{n} C_n^x p^x q^{n-x}$$

3. 当 $n=1$ 时，二项分布化简为

$$P\{X=x\} = p^x q^{1-x} \qquad x=0,1$$

二项分布的数学期望和方差

1. 二项分布的数学期望为

$$E(X) = np$$

2. 方差为

$$D(X) = npq$$

二项分布
(例题分析)

【例】已知100件产品中有5件次品，现从中任取一件，有放回地抽取3次。求在所抽取的3件产品中恰好有2件次品的概率

解：设 X 为所抽取的3件产品中的次品数，则 $X \sim B$ (3 , 0.05)，根据二项分布公式有

$$P\{X=2\}=C_3^2(0.05)^2(0.95)^{3-2}=0.007125$$

泊松分布
(Poisson distribution)

1. 用于描述在一指定时间范围内或在一定的长度、面积、体积之内每一事件出现次数的分布
2. 泊松分布的例子
   - 一个城市在一个月内发生的交通事故次数
   - 消费者协会一个星期内收到的消费者投诉次数
   - 人寿保险公司每天收到的死亡声明的人数

泊松概率分布函数

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x = 0,1,2,\cdots,n)$$

λ— 给定的时间间隔、长度、面积、体积内“成功”的平均数

$e = 2.71828$

x —给定的时间间隔、长度、面积、体积内“成功”的次数

泊松概率分布的期望和方差

1. 泊松分布的数学期望为

$$E(X) = \lambda$$

2. 方差为

$$D(X) = \lambda$$

泊松分布
(例题分析)

【例】假定某企业的职工中在周一请假的人数X服从泊松分布，且设周一请事假的平均人数为2.5人。求

（1）X 的均值及标准差

（2）在给定的某周一正好请事假是5人的概率

解：(1) $E(X)=\lambda=2.5$, $\sqrt{D(X)}=\sqrt{2.5}=1.581$

(2)

$$P\{X=5\}=\frac{(2.5)^5 e^{-2.5}}{5!}=0.067$$

泊松分布
(作为二项分布的近似)

1. 当试验的次数 n 很大，成功的概率 p 很小时，可用泊松分布来近似地计算二项分布的概率，即

$$C_n^x p^x q^{n-x} \approx \frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!}$$

2. 实际应用中，当 $P \leq 0.25$，$n>20$，$np \leq 5$时，近似效果良好

5.3 连续型随机变量的概率分布

5.3.1 概率密度与分布函数

5.3.2 正态分布

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

连续型随机变量的概率分布

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

连续型随机变量的概率分布

1. 连续型随机变量可以取某一区间或整个实数轴上的任意一个值
2. 它取任何一个特定的值的概率都等于0
3. 不能列出每一个值及其相应的概率
4. 通常研究它取某一区间值的概率
5. 用数学函数的形式和分布函数的形式来描述

概率密度函数
(probability density function)

1. 设X为一连续型随机变量，x 为任意实数，X的概率密度函数记为$f(x)$，它满足条件

$$(1)\ f(x) \geq 0$$

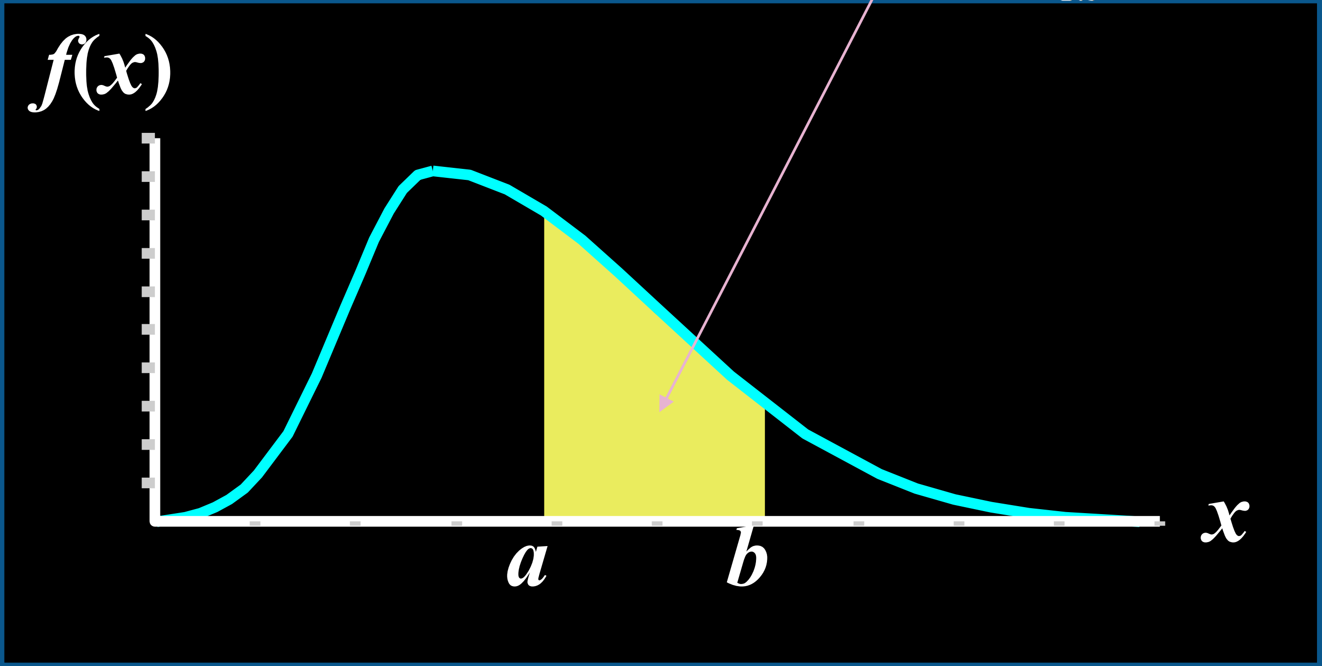
$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

2. $f(x)$不是概率

概率密度函数

- 在平面直角坐标系中画出$f(x)$的图形，则对于任何实数 $x_1 < x_2$，$P(x_1 < X \le x_2)$是该曲线下从x_1 到 x_2的面积

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



分布函数
(distribution function)

1. 连续型随机变量的概率也可以用分布函数 $F(x)$来表示
2. 分布函数定义为

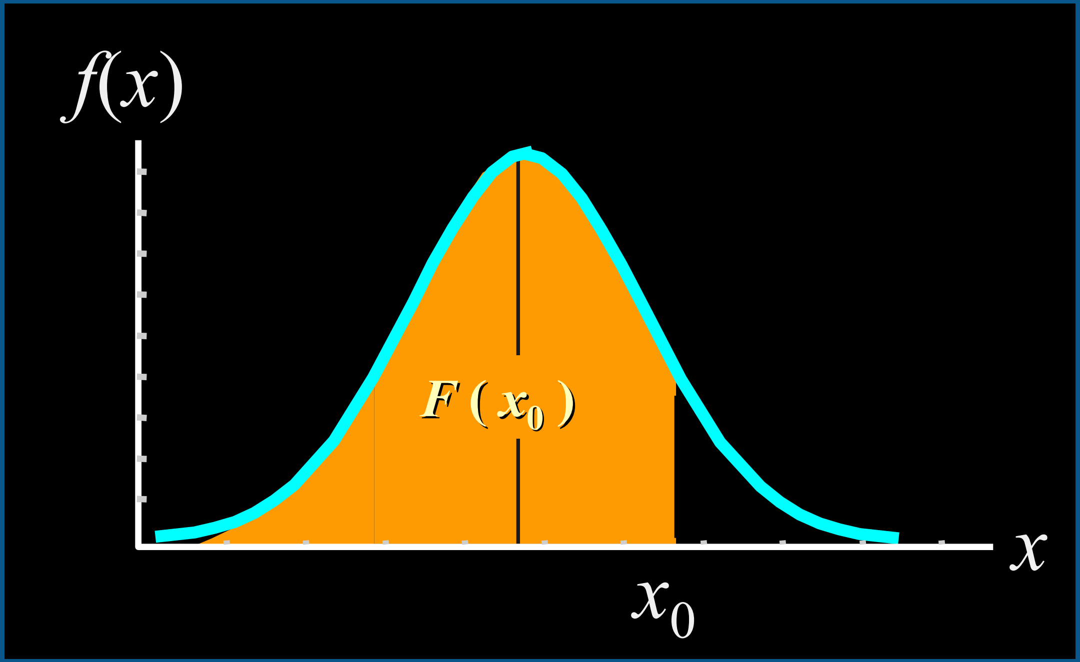
$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

3. 根据分布函数，$P(a<X<b)$可以写为

$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

分布函数与密度函数的图示

1. 密度函数曲线下的面积等于1
2. 分布函数是曲线下小于 x_0 的面积



连续型随机变量的期望和方差

1. 连续型随机变量的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\mu$$

2. 方差为

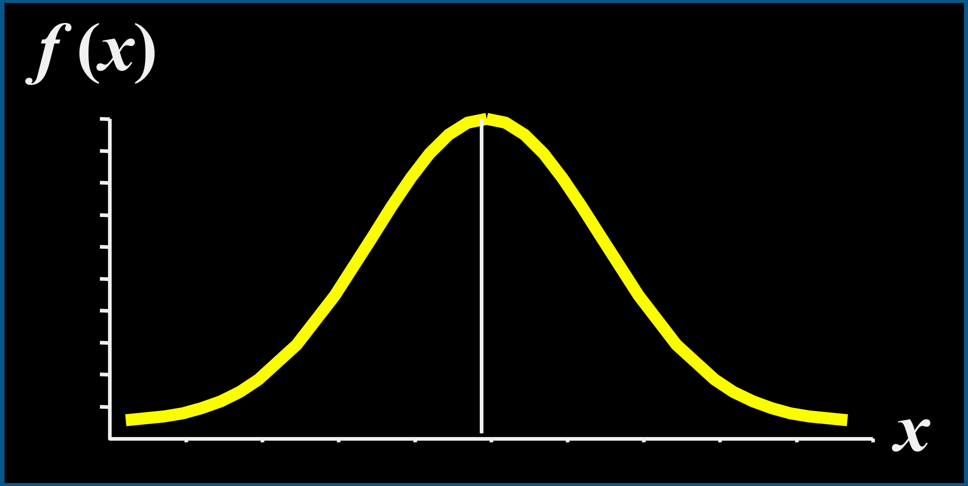
$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]f(x)\mathrm{d}x=\sigma^2$$

正态分布

作者：贾俊平，中国人民大学统计学院

正态分布
(normal distribution)

1. 描述连续型随机变量的最重要的分布
2. 可用于近似离散型随机变量的分布
   - 例如: 二项分布
3. 经典统计推断的基础



概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\quad,\quad -\infty<x<+\infty$$

$f(x)$ = 随机变量 X 的频数

σ^2 = 总体方差

π =3.14159; e = 2.71828

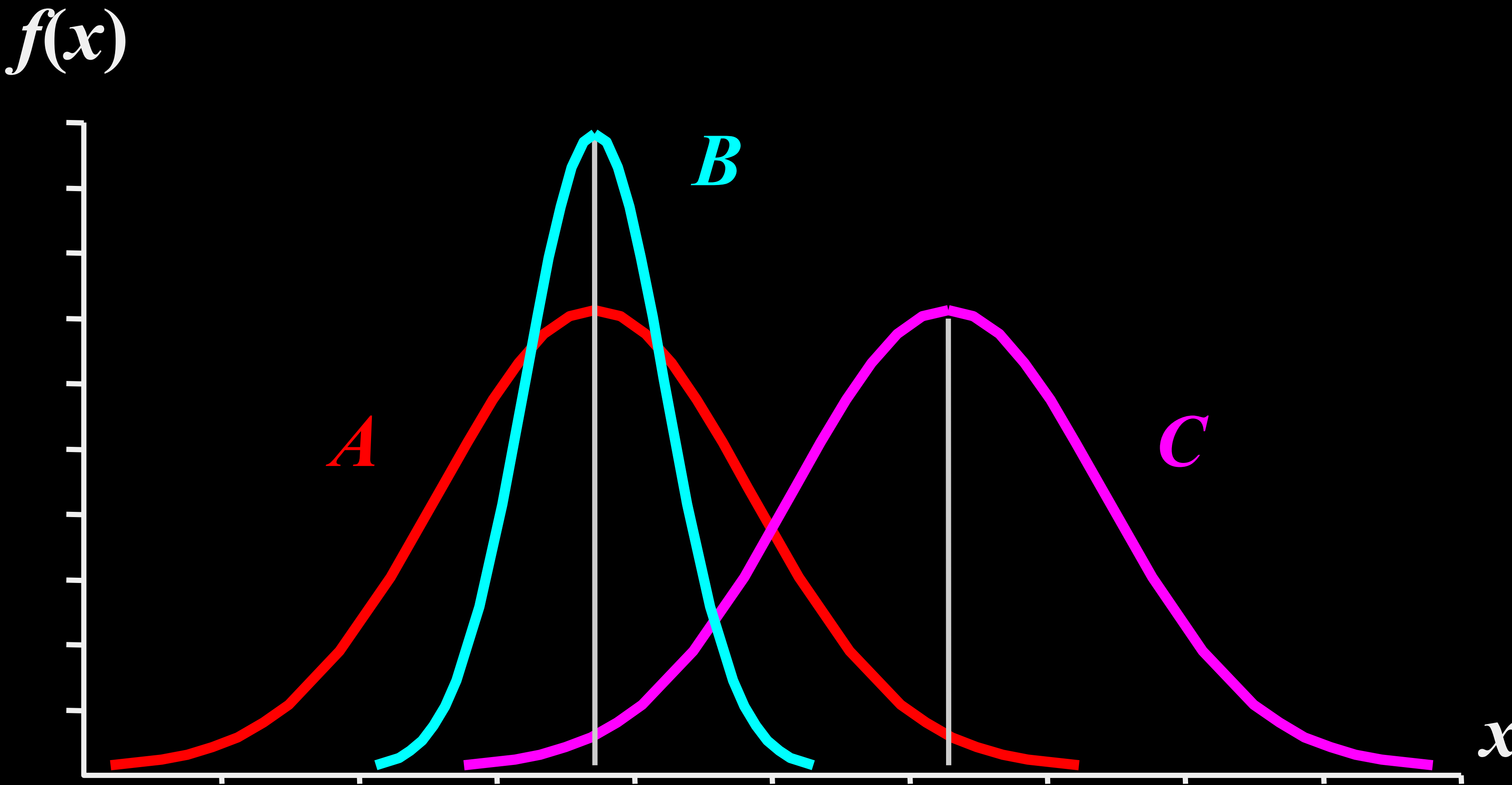
x = 随机变量的取值 ($-\infty < x < +\infty$)

μ = 总体均值

正态分布函数的性质

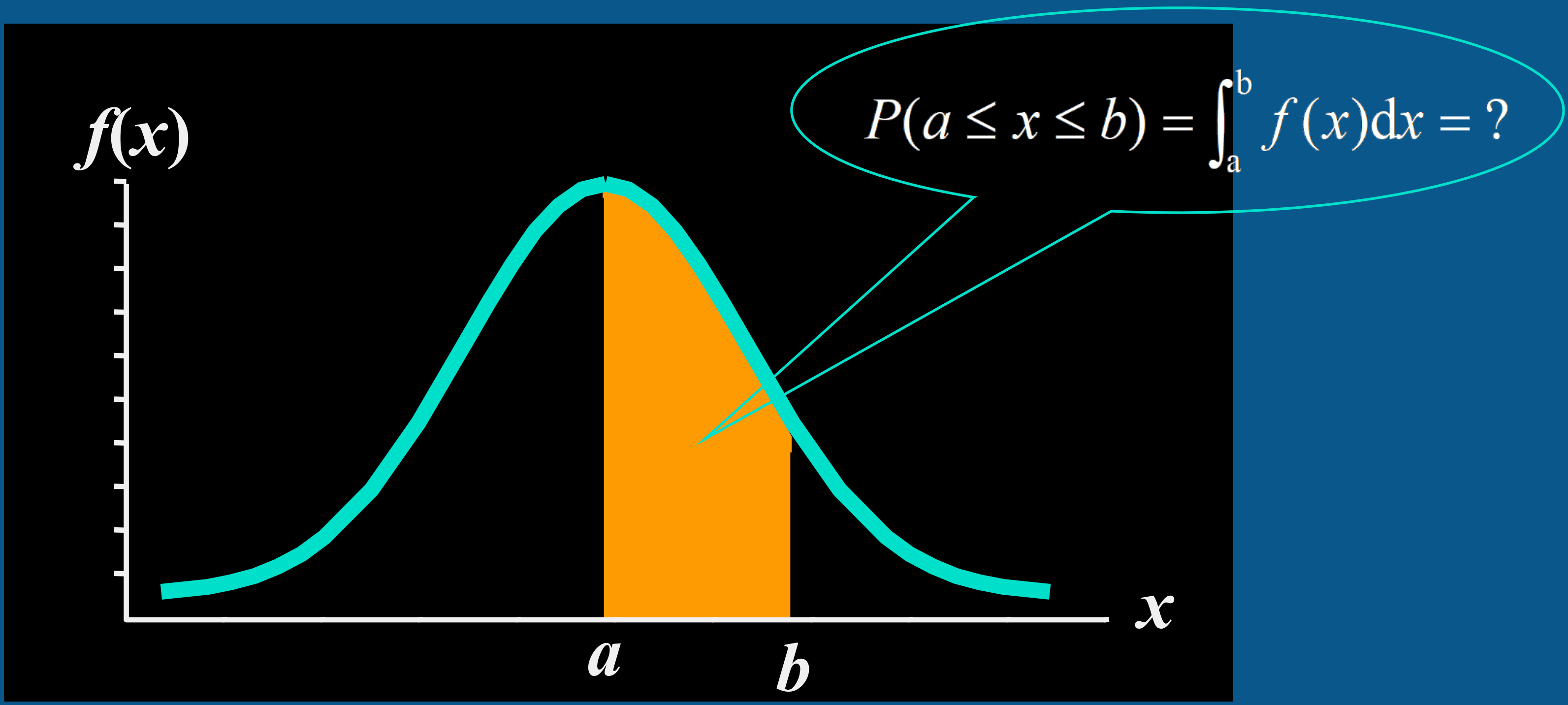
1. 概率密度函数在x 的上方，即$f(x)>0$
2. 正态曲线的最高点在均值μ，它也是分布的中位数和众数
3. 正态分布是一个分布族，每一特定正态分布通过均值μ和标准差σ来区分。μ 决定了图形的中心位置，σ决定曲线的平缓程度，即宽度
4. 曲线$f(x)$相对于均值μ对称，尾端向两个方向无限延伸，且理论上永远不会与横轴相交
5. 正态曲线下的总面积等于1
6. 随机变量的概率由曲线下的面积给出

μ和σ对正态曲线的影响



正态分布的概率

概率是曲线下的面积!



标准正态分布
(standard normal distribution)

1. 一般的正态分布取决于均值μ和标准差 σ
2. 计算概率时　　，每一个正态分布都需要有自己的正态概率分布表，这种表格是无穷多的
3. 若能将一般的正态分布转化为标准正态分布，计算概率时只需要查一张表

标准正态分布函数

1. 任何一个一般的正态分布，可通过下面的线性变换转化为标准正态分布

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

2. 标准正态分布的概率密度函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\quad,\quad -\infty<x<+\infty$$

3. 标准正态分布的分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

标准正态分布表的使用

1. 将一个一般的转换为标准正态分布
2. 计算概率时，查标准正态概率分布表
3. 对于负的 x，可由 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$得到
4. 对于标准正态分布，即$X \sim N(0,1)$，有
   - $P(a \le X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
   - $P(|X| \le a) = 2\Phi(a) - 1$
5. 对于一般正态分布，即$X \sim N(\mu, \sigma)$，有

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

本章小结

1. 随机事件及其概率
2. 离散型随机变量的分布
3. 连续型随机变量的分布

结　束