第三章 命题逻辑

主要内容

1. 命题及其符号表达
2. 命题的逻辑性质
3. 命题推理
4. 命题演算

1. 命题及其符号表达

预备知识

何谓命题?

- 命题就是通过语句对对象情况有所反映的思维形式。

1. 茅盾是文学家。
2. 2不是偶数。
3. 如果物体受到磨擦，物体就会生热。
4. 北京不仅是中国的政治中心，而且是文化中心。

命题的逻辑性质

- 如果一个命题所反映的对象情况与对象本身的情况一致，则该命题是真命题；否则是假命题。
- 一个命题不是肯定的就是否定的。
- 在上面的例子中，哪些是真命题?哪些是否定命题？

命题与语句 (联系)

- 命题是语句的思想内容，语句是命题的表现形式。

命题与语句 (区别)

- 并非任何语句都表达命题。陈述句直接表达命题，非陈述句不直接表达命题。
- 同一个命题可以用不同的语句来表达
- 同一个语句可以表达不同的命题。

  桌子上的积木或者是红色的或者是蓝色的。

  红笔写红字。

要点

- 简单命题
- 复合命题：联言命题、选言命题、
  假言命题、负命题
- 特征和符号表达方式

命题的分类

- 命题分为简单命题与复合命题。
- 简单命题：自身不包含其他命题的命题。
- 复合命题：自身包含有其他命题的命题。

几个术语

- 原子命题：简单命题的组成成份是词项，又称原子命题。
- 支命题：复合命题由简单命题与联结词组成，组成复合命题的简单命题称复合命题的支命题。
- 多重复合命题：如果一个复合命题的支命题也是复合命题，那么称多重复合命题。

哪些是简单命题？

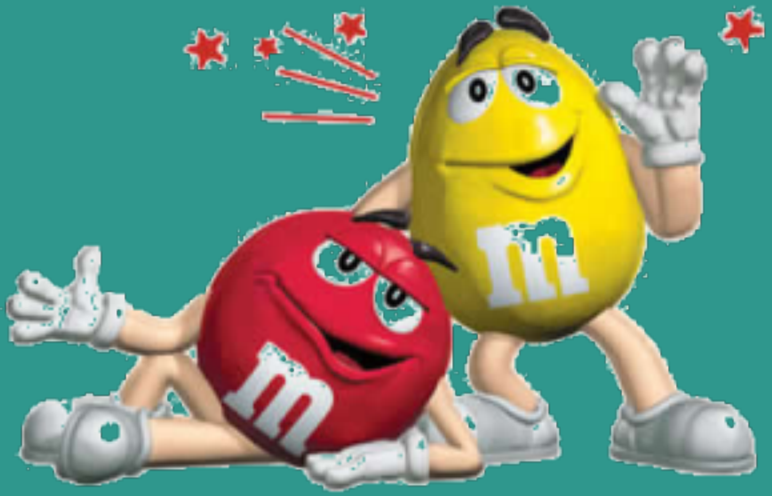
- 所有奥运赛事都是激动人心的。
- 姚明既技术全面又有号召力。
- 翟志刚和刘伯明是老乡。
- 如果神州7号成功实现太空漫步，并且顺利返回地球，那么中国的航空事业向前迈进了一大步。

复合命题的分类

- 联言命题
- 选言命题：相容 / 不相容
- 假言命题：充分 / 必要 / 充分必要
- 负命题

联言命题

- 红了樱桃，绿了芭蕉。
- 只溶在口，不溶在手。



定义

- 反映几种事物情况都为真的复合命题。
- 我们*不仅*要安顿好灾区人民的生活，*而且*还要帮助他们重建家园。
- 王医生医术高*并且*医德好。
- **结构：联言支 + 联结词 + 联言支**

联言命题的联结词

- 不仅……，而且……
- 既……，又……
- ……并且……
- 虽然……，但是……
- 一方面……，另一方面……

符号表达

$$p \wedge q$$

- p，q，r……表示联言支，符号∧（“合取”）表示联言命题的联结词。

选言命题

- 或为玉碎，或为瓦全。
- 鱼和熊掌不可兼得。

定义

- 反映几种事物情况中至少有一种为真的复合命题。
- 他*要么*是湖南人，*要么*是湖北人。
- 他*或者*会说英语，*或者*会说法语。

- **结构：选言支 + 联结词 + 选言支**

选言命题的分类

- **相容选言命题**：同时共存

  选言支能够并存，即选言支可以同时为真的选言命题。

- **不相容选言命题**：非此即彼

  选言支不能并存，即选言支中有且仅有一个真的选言命题。

联结词

相容选言命题	不相容选言命题
或者……或者…… 也许……，也许…… 可能……，可能……	要么……，要么…… 不是……，就是……

符号表达

相容选言命题	不相容选言命题
符号 $\vee$ （析取）表示相容选言命题的联结词。	用符号 $\dot{\vee}$ （不相容析取）表示不相容选言命题的联结词。
$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$

例

1. 小明这次考试失利，或者是因为身体有病，或者是因为学习不刻苦。
2. 胜者或因其强，或因其指挥无误。
3. 该三角形要么是直角三角形，要么是锐角三角形，要么是钝角三角形。
4. 今天不是星期六，就是星期天。

假言命题

- 锲而舍之，朽木不折。锲而不舍，金石可镂。

——《荀子·劝学》

定义

- 反映某一事物情况是另一事物情况的条件的复合命题。
- *如果*台风来了，*那么*天气就会凉快起来。
- *只有*各门成绩都合格，*才*能毕业。

- **结构：联结词 + 前件 + 联结词 + 后件**

假言命题的分类

- 充分条件假言命题：人心齐，泰山移
- 必要条件假言命题：不入虎穴，焉得虎子
- 充分必要条件假言命题：

人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人

充分条件假言命题

- 事物情况p是事物情况q的充分条件是指：有p一定有q，但无p未必无q。
- 前件真，后件就一定真，前件假，后件不一定假。

充分条件假言命题的联结词

- 如果……，那么……
- 只要……，就……
- 假使……，那么……
- 要是……，则……

例

- 如果天下雨，道路就会湿。
- 假如一个图形是正方形，那就一定是四边形。

符号表达

$$p \rightarrow q$$

- 用符号 → （蕴涵）表示充分条件假言命题的联结词。

必要条件假言命题

- 事物情况p是事物情况q的必要条件是指：无p一定无q，但有p未必有q。
- 前件假，后件就一定假；前件真，后件不一定真。

必要条件假言命题的联结词

- 只有……，才能……
- 仅当……，才……
- 除非……，不……
- 不……，就不……
- 没有……，就没有……

例

- 只有是广东人，才能报考该大学。
- 只有满18岁，才有选举权。

符号表达

$p \leftarrow q$

- 用符号 ← （逆蕴涵）表示必要条件假言命题的联结词。

充分必要条件假言命题

- 事物情况p是事物情况q的充分必要条件是指：有p就有q，并且无p就无q。
- 前件真，后件就一定真；前件假，后件就一定假，则说前件是后件的充分必要条件。

充分必要条件假言命题的联结词

- ……当且仅当……
- 如果……，那么……，并且只有……，才……

例

- X大于Y，当且仅当Y小于X。
- 三角形等边当且仅当三角形等角。
- 只要理论掌握了群众，理论就会变成物质力量，也只有理论掌握了群众，理论才会成为物质力量。

符号表达

$p \leftrightarrow q$

- 用符号$\longleftrightarrow$（等值）表示充分必要条件假言命题的联结词。

分析

1. 人不犯我，我不犯人；
2. 人若犯我，我必犯人。

- 解：令P表示人犯我，Q表示我犯人，则

1. $P \leftarrow Q$
2. $P \rightarrow Q$
3. $(P \leftarrow Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

负命题

- 并非物美价廉。
- 金融救援方案并非化解所有金融和经济问题的“灵丹妙药”。

定义

- 否定某一个命题而形成的命题。
- *并非*所有的人都是善良的。
- *并非*只要患感冒，就会发高烧。
- *不是*只有广东人，才能报考中山大学。
- 结构：否定联结词 + 原命题

符号表达

$\neg p$

- 用符号 ¬ （非）表示负命题的联结词。

练习一：判断命题类型

- 仁者，爱人。
- 爱她就请她吃哈根达斯。
- 白马非马。
- 不自由毋宁死。

练习二：用符号表达复合命题

- 如果中文系和哲学系都不参加这次辩论赛，那么法律系会赢。
- 解：令P表示中文系不参加这次辩论赛；Q表示哲学系不参加这次辩论赛；R表示法律系会赢，则该复合命题用符号表达为：
- $P \wedge Q \rightarrow R$

2. 命题的逻辑性质

要点

- 联言命题的逻辑特征
- 选言命题的逻辑特征：相容 / 不相容
- 假言命题的逻辑特征：充分 / 必要 / 充分必要
- 负命题的逻辑特征

联言命题的逻辑性质

p	q	p∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

相容选言命题的逻辑性质

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

至少有一个选择支为真的选言命题

不相容选言命题的逻辑性质

p	q	$p\dot{\vee}q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

有且仅有一个选择支为真的选言命题

充分条件假言命题的逻辑性质

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

前件真，后件真；前件假，后件真假不定。

必要条件假言命题的逻辑性质

p	q	p←q
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

前件假，后件假；前件真，后件真假不定。

充分必要条件假言命题的逻辑性质

p	q	p↔q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

负命题的逻辑性质

p	¬p
T	F
F	T

联言命题的负命题

- 并非（p并且q）
- 等值命题：或者非p，或者非q
- 符号表示为：$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

相容选言命题的负命题

- 并非（p或者q）
- 等值命题：非p并且非q
- 符号表示为：$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

不相容选言命题的负命题

- 并非（要么p，要么q）
- 等值命题：或者p并且q，或者非p并且非q
- 符号表示为：

$$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$$

充分条件假言命题的负命题

- 并非（如果p，那么q）
- 等值命题：p并且非q
- 符号表示为：$(\neg(p \to q)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

必要条件假言命题的负命题

- 并非（只有p，才能q）
- 等值命题：非p并且q
- 符号表示为：$\neg(p \leftarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

充分必要条件假言命题的负命题

- 并非（p当且仅当q）
- 等值命题：（p并且非q）或者（非p并且q）
- 符号表示为：

$$\neg(p \longleftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land q))$$

负命题的负命题

- 并非（并非p）
- 等值命题：p
- 符号表示为：¬（¬p）↔ p

复合命题的负命题

- $(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- $(\neg(p \dot{\vee} q)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
- $(\neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
- $(\neg(p \leftarrow q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
- $(\neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$
- $(\neg(\neg p)) \leftrightarrow p$

等值式

- A↔B
- 断定左右两端A和B等值，就是断定：无论其中变项取什么值，A和B或者同真，或者同假。
- 等值式是一种特殊的重言式。

德摩根律

- **De Morgan's Theorems**
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

交换律

- **Commutation**
- $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
- $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

结合律

- **Association**
- $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

分配律

- **Distribution**
- $(p \wedge (r \vee q)) \longleftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge q))$
- $(p \vee (r \wedge q)) \longleftrightarrow ((p \vee r) \wedge (p \vee q))$

双重否定律

- **Double Negation**
- **$p \leftrightarrow \neg\neg p$**

转换律

- **Transposition**
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

实质蕴涵

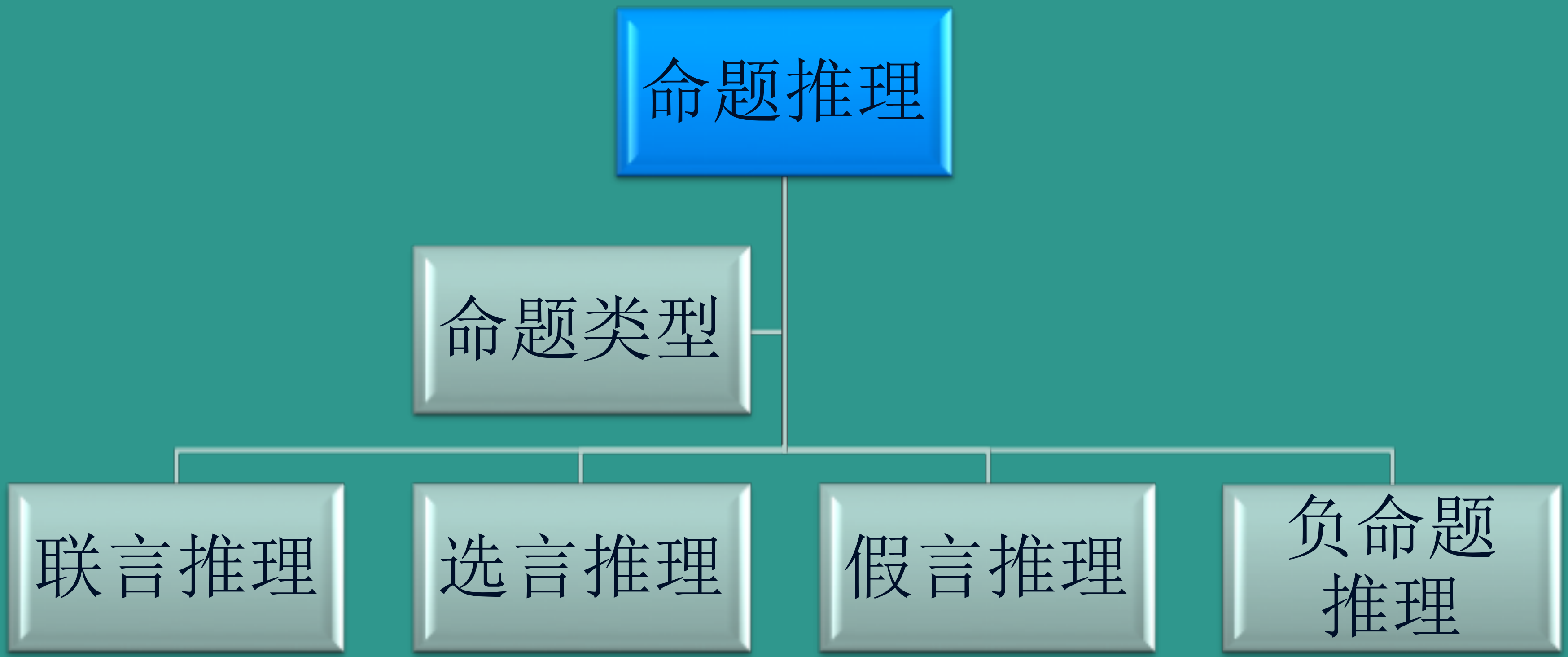
- **Material Implication**
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

重言式

- **Tautology**
- $p \leftrightarrow (p \vee p)$
- $p \leftrightarrow (p \wedge p)$

命题推理的有效式

命题推理的分类



联言推理

- 前提或结论是联言命题的推理。
- 根据联言命题的逻辑性质，联言推理有组合式和分解式两种有效形式。

组合式

- 前提是不同的简单命题，结论是由这些简单命题组成的复合联言命题。形式：

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

分解式

- 前提是一个联言命题，结论是联言命题中的任一联言支。形式：

$$\frac{p \wedge q}{p(q)}$$

例

- 莫扎特是一位音乐神童。
  莫扎特是一位高产作家。
  所以，莫扎特是既是一位音乐神童，又是一位高产作家。

联言推理有效式符号化

- (p，q) → p∧q
- (p∧q) → p 或 (p∧q) → q

相容选言推理

- 前提由一个相容选言命题和一个简单命题构成的推理。

否定肯定式

- 如果否定一个相容选言命题的任一选言支以外的其他选言支，则必须肯定这一选言支。形式：

$$\frac{p \lor q \quad \neg p}{q}$$

$$\frac{p \lor q \quad \neg q}{p}$$

例

- 贝多芬或者是科学家，或者是音乐家。
  贝多芬不是科学家。
  所以，贝多芬是音乐家。

相容选言推理有效式符号化

- $((p \lor q) \land \neg q) \rightarrow p$
- $((p \lor q) \land \neg p \rightarrow q$

不相容选言推理

- 前提由不相容选言命题和简单命题构成的推理。
- 不相容选言推理有两种有效形式：

否定肯定式

肯定否定式。

否定肯定式

$$\begin{array}{c} p \dot{\vee} q \\ \neg p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \dot{\vee} q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

- 符号化为：$((p \dot{\vee} q) \wedge \neg q) \rightarrow p$

  $((p \dot{\vee} q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

例

- 《天鹅湖》要么是柴可夫斯基的作品，要么是莎士比亚的作品。

  《天鹅湖》不是莎士比亚的作品。

  所以，《天鹅湖》是柴可夫斯基的作品。

肯定否定式

$$
\begin{array}{c}
p \dot{\vee} q \\
p \\
\hline
\neg q
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
p \dot{\vee} q \\
q \\
\hline
\neg p
\end{array}
$$

- 符号化为：$((p \dot{\vee} q) \wedge q) \rightarrow \neg p$

  $((p \dot{\vee} q) \wedge p) \rightarrow \neg q$

例

- 《罗密欧与朱丽叶》的作者要么是莎士比亚，要么是汤显祖。

  《罗密欧与朱丽叶》的作者是莎士比亚。

  所以，《罗密欧与朱丽叶》的作者不是汤显祖。

假言推理

- 前提或结论为假言命题的推理。

- 假言推理
  - 假言直言推理
    - 充分条件假言推理
    - 必要条件假言推理
    - 充分必要条件假言推理
  - 纯假言推理
    - 假言联锁推理
    - 假言易位推理

假言直言推理

- 一个前提为假言命题，另一前提为直言命题，根据假言命题中条件的逻辑性质而推出结论，这样的推理叫做假言直言推理。
- 假言直言推理简称为假言推理，可分为充分条件假言推理、必要条件假言推理、充分必要条件假言推理。

充分条件假言推理

肯定前件式

$$\frac{\begin{array}{c} p\rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

- ((p→q)∧p)→ q

否定后件式

$$\frac{\begin{array}{c} p\rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

- ((p→q)∧ ¬q)→ ¬p

例

- 如果罗丹敬仰巴尔扎克，那么他能创作出神似的巴尔扎克像。
  罗丹敬仰巴尔扎克。
  所以，罗丹能创作出神似的巴尔扎克像。

- 如果巴尔扎克认识罗丹，那么他们会成为好朋友。
  巴尔扎克和罗丹没有成为好朋友。
  所以，巴尔扎克不认识罗丹。

- 如果我还有一天寿命，那天我要做你女友。
  我还有一天的命吗？……没有。
  所以，很可惜。我今生仍然不是你的女友。
- 如果我有翅膀，我要从天堂飞下来看你。
  我有翅膀吗？……没有。
  所以，很遗憾。我从此无法再看到你。
- 如果把整个浴缸的水倒出，也浇不熄我对你爱情的火。
  整个浴缸的水全部倒得出吗？……可以。
  所以，是的。我爱你……

——蔡智恒《第一次亲密接触》

必要条件假言推理

否定前件式

$$\begin{array}{l} p \leftarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

- 符号化为：
- $((p \leftarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$

肯定后件式

$$\begin{array}{l} p \leftarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

- 符号化为：
- $((p \leftarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

例

- 只有来到阳光明媚的阿尔勒，梵高的创作灵感才能被激发。
  梵高没有来到阳光明媚的阿尔勒。
  所以，梵高的创作灵感不能被激发。

- 只有不停地作画，梵高狂躁的内心才能得到安抚。
  梵高狂躁的内心得到安抚。
  所以，梵高不停地作画。

例

- 只有为了我女儿，我才可能考虑牺牲自我。
  不是为了我女儿。
  我不可能考虑牺牲自我。

范美忠（范跑跑）

- 被困者只有冷静坚强，才能最终获救。
  4名矿工被埋196小时获救。
  所以，这4名矿工冷静坚强。

被埋最久的赖元平

充分必要条件假言推理

肯定前件式

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

- 符号化为：
- $((p \leftrightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

肯定后件式

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ q \end{array}}{p}$$

- 符号化为：
- $((p \leftrightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

否定前件式

$$\begin{array}{c} p \longleftrightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

- 符
- $((p \leftrightarrow q)\wedge\neg p)\rightarrow\neg q$

否定后件式

$$\begin{array}{c} p \longleftrightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

- 符号化为：
- $((p\leftrightarrow q)\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$

必要条件假言推理

否定前件式

$$\frac{p \leftarrow q \qquad \neg p}{\neg q}$$

符号化为：

$((p \leftarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$

肯定后件式

$$\frac{p \leftarrow q \qquad q}{p}$$

符号化为：

$((p \leftarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

纯假言推理

- 前提与结论均为假言命题的推理，叫纯假言推理。
- 假言联锁推理：由两个或以上假言命题作前提，推出一个假言命题作结论的推理。
- 假言易位推理：通过变换前提中假言命题前后件的位置而进行的推理。

假言联锁推理

充分条件肯定式

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

符号化为：

$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

充分条件否定式

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{\neg r \to \neg p}$$

符号化为：

$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (\neg r \to \neg p)$

必要条件否定式

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftarrow q \\ q \leftarrow r \end{array}}{\neg p \rightarrow \neg r}$$

符号化为：

$((p \leftarrow q) \wedge (q \leftarrow r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r)$

必要条件否定式

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftarrow q \\ q \leftarrow r \end{array}}{p \leftarrow r}$$

符号化为：

$((p \leftarrow q) \wedge (q \leftarrow r)) \rightarrow (p \leftarrow r)$

假言易位推理

- 通过变换前提中假言命题前后件位置进行的推理。

充分条件假言易位推理

$$\frac{p\to q}{\neg q \to \neg p}$$

符号化为：

$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$

必要条件假言易位推理

$$\frac{p\leftarrow q}{q \to p}$$

符号化为：

$(p\leftarrow q)\to(q\to p)$

二难推理

- 二难推理属于假言选言推理，它的前提由两个充分条件假言命题和一个有两个选言支的选言命题构成。

四种有效形式

简单构成式

$$\frac{\begin{array}{c} p\to r \\ q\to r \\ p\vee q \end{array}}{r}$$

符号化为：

$((p\to q)\wedge(q\to r)\wedge(p\vee q))\to r$

简单破坏式

$$\frac{\begin{array}{c} p\to q \\ p\to r \\ \neg q\vee\neg r \end{array}}{\neg p}$$

符号化为：

$((p\to q)\wedge(p\to r)\wedge(\neg q\vee\neg r))\to\neg p$

复杂构成式

$$\begin{array}{c} p\rightarrow q \\ r\rightarrow s \\ p\vee r \\ \hline q\vee s \end{array}$$

符号化为:

$((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\wedge(p\vee r))\rightarrow(q\vee s)$

复杂破坏式

$$\begin{array}{c} p\rightarrow q \\ r\rightarrow s \\ \neg q\vee\neg s \\ \hline \neg p\vee\neg r \end{array}$$

符号化为:

$((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\wedge(\neg q\vee\neg s))\rightarrow(\neg p\vee\neg r)$

搞怪二难推理

- 你吃，或者不吃零食，大脸就在那里，不悲不喜；你喝，或者不喝可乐，腰围就在那里，不来不去；
- 你跑，或者不跑步，体重就在那里，不增不减；你减，或者不减肥，肉就在你身上，不舍不弃；
- 来脂肪的怀里，或者，让胖子住进别人的心里，默然想吃，忍住，纠结，泪崩！

假言联言推理

肯定式

$$\frac{\begin{array}{c} p\to q \\ r\to s \\ p\wedge r \end{array}}{q\wedge s}$$

符号化为:

$((p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(p\wedge r))\to(q\wedge s)$

否定式

$$\frac{\begin{array}{c} p\to q \\ r\to s \\ \neg q\wedge\neg s \end{array}}{\neg p\wedge\neg r}$$

符号化为:

$((p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(\neg q\wedge\neg s))\to(\neg p\wedge\neg r)$

归谬推理

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \to \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

符号化为：

$$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$$

- 亚里士多德认为物体越重则落地越快，然而这个假说是错误的。
- 证明：
- 有两个物体，重的称**H**，轻的称**L**。根据假说，**H**比**L**落地快。现在把**H**和**L**捆在一起。

1. **L**加**H**比**H**重，因此根据假说应该比**H**落得快。
2. 但两物体捆在一起的情况下，**L**比较轻，会使**H**减速，则**L**加上**H**应该比**H**单独落得慢。

- 根据原来的假设，**L**加**H**比**H**单独降落的既慢又快。因此，荒谬，原来的假说一定是错误的。

练习1：这是什么式二难推理？

- 《红楼梦》64回：宝玉从雪雁处得知黛玉在私室祭宗，想：我此刻走去，见她伤感，必极力劝解，又怕她烦恼郁结于心；若不去，又恐她过于伤感，无人劝止，两件皆足致疾……

练习2

- 如果上帝是全能的，他就能够消除罪恶；如果上帝是全善的，他就愿意消除罪恶。

上帝或没能消除罪恶，或不愿消除罪恶。

所以，上帝或不是全能的，或不是全善的。

练习3

- 如果你是诚实的革命者，就不能说假话；如果你是诚实的革命者，就不能隐瞒自己的过错。

你或者说假话或者隐瞒自己的过错。

你不是诚实的革命者。

练习4

- 如果别人的意见是正确的，那么你应该接受；如果别人的意见是错误的，那么你应该反对。

  别人的意见或者是错误的或者是正确的。

  你应该或者接受或者反对。

4. 命题演算

要点

- 几个概念
- 重言式的判定
- 命题演算：命题逻辑的自然推理系统

  命题逻辑的公理系统

命题真值

- 复合命题由若干支命题借助一定的逻辑联结词形成。
- 现代逻辑考虑各支命题之间的真假与复合命题的真假方面的联系。
- 命题的真假二值，称为命题的真值。

真值联结词

- 真值联结词：指表示复合命题与其支命题之间真假关系的联结词。
- 五个基本的真值联结词：

  否定（¬）、合取（∧）、析取（∨）、蕴涵（→）、等值（⟷）。

真值形式

- 真值联结词与命题变项（用小写英文字母p、q、r、s…表示，意指组成复合命题的各个原子命题）所构成的形式结构，就是真值形式。

五种基本的真值形式

- 否定式：¬p
- 合取式：p∧q
- 析取式：p∨q
- 蕴涵式：p→q
- 等值式：p↔q

- 五个联结词的结合力按照下列顺序递减：
  ¬、∧、∨、→、↔

- $p \dot{\vee} q \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $p \leftarrow q \leftrightarrow p \vee \neg q$

函数

- $y = f(x)$
- x称自变元，y是对应于x的函数 f的值。
- 在数学中函数关系常表现为一些运算，如：加、减、乘、除，等。

真值函项

- 一个函数，如果其本身的值是真值，其自变元所取的值也是真值，则此函数称为真值函项。
- 真值函项性是真值形式的一个重要特征。
- 真值形式中的命题变项的真值决定着该真值形式的真值，两者构成一种函数关系，每一个真值形式都是一个真值函项。
- 真值函项的数目是由公式中变项的真假组合决定的。当一个公式有n个变项时，其真假组合便有2^n种。

真值函项的种类

- 常真的：不论其中的命题变项取什么值，函项的值总是真的。
- 常假的：不论其中的命题变项取什么值，函项的值总是假的。
- 可满足的：函项的值有时为真有时为假。

命题形式

- 永真式（重言式）：$p \vee \neg p$、$p \rightarrow p$
- 永假式（矛盾式）：$p \wedge \neg p$、$p \leftrightarrow \neg p$
- 可满足式：$p \vee q$、$p \rightarrow q$

有效推理与重言式

- 在命题逻辑中，任何有效的复合命题推理，在形式上都是一个重言式，要判定一个复合命题推理是否有效，其实质就是判定反映该推理的公式是否为重言式。
- 命题逻辑的主要任务就是考察重言式、构造能包罗所有重言式的形式推理系统。

例

- 每个有效推理形式都有相应的重言式，如：如果p，那么q。

  p。

  ---

  q。

- 用蕴涵式表示为：$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

重言式的判定

- 真值表法
- 归谬赋值法

真值表判定方法

- 找出公式中所有不同的命题变项，并竖行列出它们之间所有可能的真假组合。
- 按照公式的生成次序，由简单到复杂横行列出该公式的所有子公式，直至该公式本身。
- 按照真值联结词的真值表，由命题变项的真值逐步计算出各个子公式的真值，最后算出该公式本身的真值。

例1

- $((p \to q) \land p) \to q$

解

- $((p\to q)\wedge p)\to q$

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge p$	$((p\to q)\wedge p)\to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

例2

- $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

不便之处

- 重言式方法的不足之处是，对于包含有较多命题变项的真值形式来说，要列出其真值表是很繁琐的。
- 在真值表方法的基础上提出了简化真值表的方法，这种方法也叫归谬赋值法。

归谬法基本思路

- 如果某一公式A是一个重言式，那么，无论给A中的变项指派什么样的真值，根据A的形式结构以及其中联结词所表示的真值运算，A必定且只能取值为真。
- 因此，若假设A为假，在此基础上如能导出矛盾，则说明该假设不可能成立，因此A必为重言式。

步骤

- 假设该公式为假。
- 从假设出发，根据真值联结词的真值表，依次对公式中的各部分公式赋以相应的真值，直到所有的变项都被赋以确定的真值为止。
- 检查所有变项的真值，若其中至少有一个变项既真又假，即出现了逻辑矛盾 ，则假设不成立，该公式为真，是重言式；若没有导致逻辑矛盾，则假设成立，该公式不是重言式。

例3

- $(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$

解

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

F

T　　F

T　　T　　T　　F

T　　T　　T　　T

- 由上得，在假定公式为假的情况下，导出了逻辑矛盾：**r**的值既真又假，因此，假定不成立，该公式是重言式。

练习

- $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

命题演算

——命题逻辑的形式系统

现代逻辑的形式化特点

- 现代逻辑采用人工语言构造逻辑系统。
- 使用人工语言的目的是克服自然语言的歧义性、模糊性，保证演算的严密性和可靠性。
- 在形式系统中只考虑符号与符号之间的关系，不考虑符号的意义。

形式系统

- 指没有具体语义内容的人工符号语言表达系统，对符号意义的解释称语义解释。
- 一个形式系统通常由形式语言和演绎系统两部分组成。
- 形式语言包括初始符号与形成规则。
- 演绎系统包括公理、推理规则与定理。

几个概念

- 公理：被挑选出来的重言式，是系统中推导其他重言式的出发点，在系统中不加证明。
- 推理规则：推理过程中必须遵循的规则。
- 定理：证明的结果。

命题演算

- 命题演算根据是否使用公理分为：
- 公理系统，也叫公理化演算；
- 自然推理系统，也叫自然演算。

自然推理系统

- 没有公理的推理系统。
- 特点：无论在变形规则还是推理规则方面都更接近自然科学，特别是数学中常用的推理规则。

形式语言

- 初始符号：
- 命题变项：p，q，r，p_1，…
- 联结词：否定¬，析取∨，合取∧，
  蕴涵→，等值↔。
- 辅助符号：（，）。

合式公式的形成规则

- 命题变项是合式公式。
- 如果A是合式公式，则¬A是合式公式。
- 如果A和B是合式公式，那么A∨B，A∧B，A→B，A　B也是合式公式。
- 只有符合以上三条的是合式公式。

推理规则

- 假设引入规则（P）：可按推演需要随时引入一个假设A为前提。
- 重复规则：先前已出现的前提可在以后的证明过程中重复引用。

合取引入规则（∧＋）

- 从A和B可推出A∧B：

  A，B

  ∴ A∧B

合取消去规则（$\wedge\neg$）

- 从$A\wedge B$中可推出A，也可推出B：

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A} \qquad \frac{A\wedge B}{\therefore B}$$

析取引入规则（∨＋）

- 由A或B可推出A∨B：

A	B
∴ A∨B	∴ A∨B

析取消除规则（∨－）

- 设C为求证的公式，A∨B为前提。假如能证明从A可推出C，从B也能推出C，则C得证：

$$A \lor B$$
$$A \to C$$
$$B \to C$$
$$\therefore C$$

蕴涵引入规则（→＋）

- 在一个前提集合P的基础上加进一个假设而推出B，那么从这个前提集合可以推出A→B：

  （A）

  B

  ∴ A→B

蕴涵消除规则（→－）

- 从A和A→B可得B：

  A→B

  A

∴ B

等值引入规则（←→＋）

- 从**A→B**和**B→A**可推出**A←→B**：

  A→B

  B→A

  ∴ **A←→B**

等值消除规则（↔ −）

- 从A↔B可推出A→B或B→A：

A↔B　　　　　　A↔B

∴ A→B　　　　　∴ B→A

否定引入规则（¬＋）

- 在给定前提下，引入假设A，由此推出B和¬B，那么原来的前提可推出¬A：

（A）

B

¬B

∴ ¬A

否定消除规则（¬－）

- 从¬¬A可推出A：

¬¬A

∴ A

定理1

- 定理1：$p \to (p \vee q)$
- 证明：

1. p P（假设）
2. $p \vee q$ 1∨＋
3. $p \to (p \vee q)$ 1，2→＋

定理2

- 定理2： $(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$
- 证明：

1.	$p\vee q$	P
2.	p	P
3.	$q\vee p$	$2\ \vee+$
4.	$p\rightarrow(q\vee p)$	$2，3\ \rightarrow+$
5.	q	P
6.	$q\vee p$	$5\ \vee+$
7.	$q\rightarrow(q\vee p)$	$5，6\ \rightarrow+$
8.	$q\vee p$	$1，4，7\ \vee-$
9.	$(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$	$1，8\ \rightarrow+$

公理系统P

- 命题演算有不同的公理系统。
- 由德国逻辑学家希尔伯特（D·Hilbert）与阿克曼（W·Ackermann）提出的一个较为经典的系统，简称系统P。

初始符号

1. 命题变项：p，q，r，p_1，…
2. 联结词：否定¬，析取∨
3. 辅助符号：（，）。

形成规则

- 一个表示命题变项的初始符号π是合式公式。
- 如果符号序列A是合式公式，那么¬A也是合式公式。
- 如果符号序列A和B是合式公式，那么A∨B是合式公式。
- 只有符合上面三条的符号序列是合式公式。

定义

- 定义1：（$A \wedge B$）$=df \neg$（$\neg A \vee \neg B$）
- 定义2：（$A \rightarrow B$）$=df \neg A \vee B$
- 定义3：（$A \longleftrightarrow B$）$=df$（$A \rightarrow B$）$\wedge$（$B \rightarrow A$）
- 定义的目的在于引进新的联结词，使公式得到简化；定义也是形成规则的补充，引进新的合式公式。

公理

- 公理1：（$p \vee p$）$\rightarrow p$
- 公理2： $p \rightarrow$（$p \vee q$）
- 公理3：（$p \vee q$）$\rightarrow$（$q \vee p$）
- 公理4：（$q \rightarrow r$）$\rightarrow$（（$p \vee q$）$\rightarrow$（$p \vee r$））

公理1

- 公理1：（p∨p）→p
- 重言律
- 意思：如果p或p真，那么p真。

公理2

- 公理2：　$p \to (p \vee q)$
- 析取律
- 意思：如果p真，那么p或者q真。

公理3

- 公理3：（p∨q）→（q∨p）
- 析取交换律
- 意思：析取式左右两边互相交换，真值保持不变。

公理4

- （q→r）→（（p∨q）→（p∨r））
- 附加律
- 意思：如果蕴涵式 q→r 是真的，那么给q和r各加上一个相同析取项的蕴涵式（p∨q）→（p∨r）也是真的。

推理规则

- 代入规则：将合式公式A中出现的某初始符号π全部代以某一合式公式B，从而得到合式公式A（π/B），即从A可得A（π/B）
- 分离规则：从A和A→B可推出B。
- 定义置换规则：定义两边的定义项可互相替换。定义与被定义项两个公式是等值的。与代入规则不同，置换不必处处进行。

定理1

- 定理1：（q→r）→（（p→q）→（p→r））
- 证明：

1. （q→r）→（（p∨q）→（p∨r））　　公理4
2. （q→r）→（（ ¬p∨q）→（¬p∨r））1代入p/ ¬p
3. （q→r）→（（p→q）→（p→r））　　2定义置换

定理2

- 定理2：p→p
- 证明：

1. p→（p∨q）　　公理2
2. p→（p∨p）　　1代入q/ p
3. （p∨p）→p　　公理1
4. （q→r）→（（p→q）→（p→r））　　定理1
5. （（p∨p）→p）→（（p→（p∨p））→（p→p））　　q/ p∨p，r/ p
6. （p→（p∨p））→（p→p）　　5、3分离
7. p→p　　6、2分离