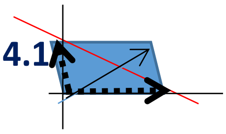
P196 4.1 仅供参考 **Draft from Deng Yinxin**

4、



13、

A. 不在。三个

B. 无穷多个

C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以$w$在$\{v_1, v_2, v_3\}$生成的子空间中

15、零向量不在 W 中。

31、H 是 V 中任意一个包含 u,v 的子空间，子空间满足性质：对标量乘法、向量加法封闭，且包含零向量，而 Span{u,v}是 u,v 的线性组合的集合，所以 H 包含 Span{u,v}.

P205　　4.2　　　　　　　　　仅供参考

验证$Aw=0$是否有非平凡解

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

6、

9、W是R^4的一个向量空间，因为W是线性方程组

$$p-2q-4s=0$$
$$2p-s-5r=0$$

的解集

18、（a）k=3,（b）k=4

25、

A. 真命题。满足 Ax=0 的所有 x 的集合为矩阵 A 的零空间

B. 假命题。矩阵的零空间包含在 R^n 中

C. 真命题。$ColA$是线性变换$x \mapsto Ax$的值域，$ColA$即A的列空间

D. 真命题。方程 Ax=b 是相容的，则方程 Ax=b 对 R^m 中每一个 b 有一个解，则$ColA$就是R^m

E. 真命题。线性变换 T 的核是 V 中所有满足 T(u)=0 的向量 u 的集合，包含零向量，且对向量加法和标量乘法封闭，所以一个线性变换的核是一个向量空间。

F. 真命题。因为 ColA 中一个典型向量可以写成 Ax 的形式。

26、

A. 真命题。由定理 2 可得 A 的零空间是 R^n 的一个子空间，所以它是一个向量空间

B. 真命题。ColA 是 R^m 的一个子空间

C. 假命题。ColA 是 A 的列的所有线性组合组成的集合。ColA 中的向量不一定都能使 Ax=b 有解。

D. 真命题。线性变换 T 的核是 V 中所有满足 T(u)=0 的向量 u 的集合，而 NulA 为 R^n 中在线性变换 $x \mapsto Ax$ 下映射到 R^m 中的零向量的全体向量的集合，T 可由一个矩阵变换得到，所以命题成立

E. 真命题。线性变换 T 的核是 V 中所有满足 T(u)=0 的向量 u 的集合，包含零向量，且对向量加法和标量乘法封闭，T 的值域是 W 中所有具有形式 T（x）的向量的集合，所以一个线性变换的值域是一个向量空间。

F. 真命题。一个齐次线性微分方程的全部解的集合被判明是一个线性变换的核。

28、第一个方程组有解则

$$线性方程组的系数矩阵A，A\mathrm{x}=b有解，b:\begin{bmatrix}0\\1\\9\end{bmatrix}属于ColA,$$
$$因为ColA是R^m的子空间，满足对标量乘法封闭，$$
$$所以5b属于ColA,所以第二个方程组一定有解。$$

P213 4.3 **仅供参考**

1、是R^3的基，因为$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,有三个主元列，所以是$R^3$的基

$$\begin{bmatrix}1&0&-2&-2&0\\0&1&1&4&0\\3&-1&-7&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&-2&0\\0&1&1&4&0\\0&-1&-1&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&-2&0\\0&1&1&4&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

9、$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$,基为$\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

12、$3x+y=0,\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,所以基为$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$

B有两个自由变元：x_3,x_4

13、$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-6\\-\frac{5}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-5\\-\frac{3}{2}\\0\\1\end{bmatrix}$,所以$NulA$的基为$\left\{\begin{bmatrix}-6\\-\frac{5}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-\frac{3}{2}\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$ColA$的基为$\left\{\begin{bmatrix}-2\\2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-6\\8\end{bmatrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix}11&0&-2&2&3\\0&1&-2&-1&-1\\-2&2&-8&10&-6\\3&3&0&3&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2&2&3\\0&1&-2&-1&-1\\0&1&-6&7&0\\0&1&2&-1&0\end{bmatrix}\sim$$

15、$\begin{bmatrix}1&0&-2&2&3\\0&1&-2&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&4&1\end{bmatrix},\{\mathrm{v}_1,v_2,v_3,v_4\}$

P222 4.4　　仅供参考

1、

$$x=5\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

5、

$$\begin{bmatrix}1&3&-1\\-2&-5&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$[x]_B=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

9、

$$\begin{bmatrix}1&2\\-3&-5\end{bmatrix}$$

P228 4.5

1、

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix},(a)\text{基为}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}\right\},(b)\text{维数为}2$$

5、

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-3\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}0\\5\\2\\6\end{bmatrix},(a)\text{基为}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\\2\\6\end{bmatrix}\right\},(b)\text{维数为}3$$

11、

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&5\\0&1&-1&2\\2&1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-2&5\\0&1&-1&2\\0&-5&5&-8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-2&5\\0&1&-1&2\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

已给向量生成的子空间的维数为3

19、

A. 真命题。列空间维数等于

B. 假命题。因为子空间必须包含零向量，所以该平面应过原点。

C.假命题。向量空间P_n的维数应为$n+1$

D.假命题。根据基定理，若 S 是 V 的一个基，则还应满足 S 中的向量个数为 n

E.真命题。根据定理 9 可得该命题为真命题。

20、

A.假命题。R^2不是R^3的子集。

B.真命题。Nul A 的维数是方程 Ax=0 中自由变量的个数。

C.真命题。如果 V 不是由一有限集生成，则 V 称为无穷维的。

D.假命题。S 若为 V 的一个基，则 S 必须是线性无关集。

E.真命题。只有R^3本身是3维子空间。

29、

A.　真命题。该集合能生成 V，则它含有向量个数至少有 V 的基中向量的个数，若它是基，则根据定理 10，p=dimV，所以命题成立。

B.　真命题。因为该集合是线性无关集，所以它含有的向量个数少于或等于 V 中基的个数，根据定理 10 可得基中向量个数等于 V 的维数，所以 dimV 大于等于 p

C.　真命题。生成集不一定都是线性无关的。

30、

A.　假命题。该线性相关集所含向量个数与 V 的维数 dimV 无关。

B.　真命题。该集合若能生成 V，则 p 大于等于 dimV.

C.　假命题。若取 V 中的零向量，则构成的集合必是线性相关的。

仅供参考

P235 4.6

1、
$$rankA=2,\dim NulA=2,$$
$$ColA\text{的基为}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\2\\-6\end{bmatrix}\right\},\ RowA\text{的基为}\{(1,0,-1,5),(0,-2,5,-6)\}$$
$$NulA\text{的基为}\left\{\begin{bmatrix}1\\\frac{5}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

5、$\dim NulA=4,\dim RowA=3,rankA^T=3$

17、A.真命题。A 的行与 A 的转置的列相同。

B.假命题。A 的前三行的每一行都含有主元，才能构成 RowA 的一个基。

C.真命题。根据秩定理可得。

D.假命题。应等于 A 的列数。

E.假命题。行变换不会改变一个矩阵的表面上的秩，因为 A 的秩即 A 的列空间的维数，也就是其行空间的维数。

18、$A.$假命题。$\dim ColA\neq\dim ColB$

B.假命题。行变换会改变行的相关关系。

C.真命题。因为 dim ColA+dim NulA=n,n 为 A 的列数，ColA 的维数等于 A 的主元列个数。

$D.$真命题。A^T的行向量即是A的列向量，所以A^T的行空间与A的列空间相同。

E.真命题。根据定理 13 可得。

31、

$$v^T=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}, uv^T=\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a & 2b & 2c\\-3a & -3b & -3c\\5a & 5b & 5c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a & b & c\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, rankuv^T=1,$$

若$a=b=c=0$,则$rankuv^T=0$,所以$rankuv^T\le 1$

仅供参考

P242 4.7

1、a. $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, b. \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

6、a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, [x]_D = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & \vdots & 4 & 8 \\ 2 & 2 & \vdots & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

B到C的坐标变换矩阵: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

9、

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & \vdots & 2 & -2 \\ 4 & 4 & \vdots & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

C到B的坐标变换矩阵: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

基B到基C的变换矩阵为: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

13、$[x]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, [x]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$

15、（a）B 是 V 的一个基（b）坐标映射是一个线性变换（c）一个矩阵和向量的乘积（d）

x 相对于 B 的坐标向量。

16、（a）由定理15可得$Q=\begin{bmatrix}[b_1]_c & [b_2]_c & \cdots & [b_n]_c\end{bmatrix}$

（b）$[b_k]_c$

（c）定理7：唯一表示定理。